Théorie des jeux

Renaud Bourlès
Dominique Henriet

EAO-32-O-FIST

2ème année 2014-2015

Chapitre 1

Introduction

1.1 Qu'est-ce que la théorie des jeux ?

La théorie des jeux est une discipline théorique qui permet de comprendre (formellement) des situations dans lesquelles les joueurs, les preneurs de décision, interagissent. Un jeu est alors définit comme un univers dans lequel chaque preneur de décision possède un ensemble d'actions possibles déterminé par les règles du jeu. Le résultat du jeu dépend alors conjointement des actions prises par chaque preneur de décision.

Cette discipline possède de nombreuses applications permettant notamment de comprendre des phénomène économiques, politiques ou même biologiques. Parmi ces phénomènes, voici une liste de situations dans lesquelles la théorie des jeux peut être appliquée :
- la concurrence entre entreprises,
- la concurrence entre hommes politiques,
- un jury devant s'accorder sur un verdict,
- des animaux se battant pour une proie,
- la participation à une enchère,
- le vote d'un législateur soumis à la pression de lobbies, ou
- le rôle des menaces et des sanctions dans une relation de long terme.

Comme toute discipline théorique, la théorie des jeux consiste en une collection de modèles. Ces modèles sont alors des abstractions utilisées pour comprendre ce qui est observé ou vécu. Ils permettent de prédire l'évolution d'un jeu ou de conseiller le ou les joueurs sur le meilleur coup à jouer.

Les questions à se poser sont alors :
– Qu'est-ce qu'un individu peut inférer sur les décisions des autres ?
– Peut-on prédire le choix de chaque joueur ?
– Quel sera le résultat de ces actions ?
– Cela fait-il une différence si le jeu se déroule plusieurs fois

1.2 La théorie du choix rationnel

Comment modéliser le comportement et les choix des joueurs ?

La théorie du choix rationnel est une composante majeure de la plupart des modèles de théorie des jeux. Cette théorie stipule qu'étant données ses préférences, un joueur choisit la meilleure action parmi celles disponibles. On n'impose toutefois aucune restriction qualitative sur les préférences du joueur. La "rationalité" tient dans la cohérence de actions d'un joueur avec ses préférences, pas de la nature de ces préférences.

Afin de pouvoir représenter les préférences, il est toutefois nécessaire de supposer que celles-ci sont complètes sur l'ensemble des actions possibles : si un joueur doit faire un choix entre deux actions, il sera toujours capable de dire laquelle il préfère des deux ou si il est indifférent entre les deux. Pour que le problème soit formalisable, il est par ailleurs nécessaire de supposer des préférences transitives : si l'action a est préférée à l'action b et b préférée à c alors a devra être préférée à c. Aucune autre restriction n'est imposée aux préférences. Par exemple, il se peut qu'un joueur ait des préférences altruistes dans le sens où ses préférences dépendent du bien-être du ou des autres joueurs.

Comment représenter les préférences ?

Une des possibilités est de spécifier pour chaque paire d'actions, l'action que le joueur préfère ou de noter que le joueur est indifférent entre les deux actions. Alternativement, on peut représenter les préférences par une "fonction de paiement" qui associe un nombre à chaque action de telle sorte que les actions avec le plus grand "score" soient celles qui sont préférées.

Comment évaluer le résultat d'un jeu pour un individus ?

Lorsqu'un jeu conduit à des gains monétaires et que les joueurs sont opportunistes (*i.e.* non altruistes), il est assez facile d'évaluer le résultat d'un jeu et leurs préférences : ils préfèrent le résultat pour lequel ils obtiennent le plus d'argent. Cependant tous les jeux n'ont pas un résultat monétaire. Ainsi, plus généralement, on définira, la fonction de paiement u déterminant la "satisfaction" des joueurs. La fonction de paiement u représentera alors les préférences d'un joueur si pour toute actions a et b (dans l'ensemble des actions possible) :

$$u(a) > u(b) \text{ si et seulement si le joueur préfère } a \text{ à } b$$

Exemple 1.1 *Une personne a le choix entre 3 destinations pour ses vacances : La Havane, New-York et Venise. Elle préfère La Havane aux deux autres, qu'elle juge équivalentes. Ses préférences entre les 3 destinations sont représentées par n'importe quelle fonction de paiement qui assigne le même nombre à New-York et Venise et un nombre plus élevé à La Havane. Par exemple, on peut fixer u(La Havane)=1 et u(New-York)=u(Venise)=0 ; ou u(La Havane)=10 et u(New-York)=u(Venise)=1 ; ou encore u(La Havane)=0 et u(New-York)=u(Venise)=-2,...*

Exercice 1.1 *Le joueur ① se soucie à la fois de sa richesse et de la richesse du joueur ②. Plus précisément, la valeur qu'il attache à une unité de sa propre richesse est la même que celle qu'il attache à deux unités de la richesse du joueur ②. Par exemple, il est indifférent entre une situation où sa richesse est 1 et celle du jouer 2 est 0, et une situation où sa richesse est 0 et celle du joueur ② est 2. Comment sont ordonnées ses préférences entre les résultats (1,4), (2,1) et (3,0) où la première composante est sa richesse et la seconde celle du joueur ② ? Donner une fonction de paiement cohérente avec ces préférences.*

Réponses :
- $(1,4) \sim (3,0) \succ (2,1)$
- $u(\omega_1, \omega_2) = \omega_1 + \frac{1}{2}\omega_2$, ou $u(\omega_1, \omega_2) = 2\omega_1 + \omega_2$, ou plus généralement $u(\omega_1, \omega_2) = 2t\omega_1 + t\omega_2 \ \forall t \in \mathbb{R}$

Attention : Les préférences du joueur telles que présentées ici, ne contiennent qu'une information ORDINALE. Elles nous apprennent que le joueur préfère

a à b à c mais ne nous disent pas "de combien" il préfère a à b ou si il "préfère plus" a à b que b à c.

La théorie du choix rationnel peut-être exposée simplement : dans chaque situation, le joueur choisit parmi les actions disponibles celle qui est la meilleure selon ses préférences. En permettant que le joueurs soient indifférents entre plusieurs actions, la théorie des choix rationnels stipule que : **l'action choisie par le preneur de décision est au moins aussi bonne (au sens de ses préférences) que toutes les autres actions disponibles**.

Vous aurez noté que cette théorie apparaît également dans la théorie économique classique, du consommateur ou du producteur. Dans la théorie du consommateur, l'ensemble des actions possibles est l'ensemble des paniers de biens abordables ; alors que dans la théorie du producteur, il correspond à tous les vecteurs *input-output* possibles et l'action a est préférée à l'action b si a conduit à un profit plus important que b.

Jusqu'ici nous avons supposé que le preneur de décision choisit une action et ne s'intéresse qu'à cette action. Cependant, en réalité, peu d'individus ont le luxe de contrôler l'ensemble des variables qui les affectent. Si certaines sont la résultante de décisions d'autre individus, la prise de décision devient plus complexe. L'étude de ces situations, qui peuvent être modélisées sous forme de jeux, sera l'objet de ce cours.

Nous considérerons dans un premier temps des situations dans lesquelles les joueurs ne peuvent pas s'allier ou s'engager sur une action vis-à-vis de leur opposant, c'est-à-dire des jeux non-coopératifs.

Table des matières

Bibliographie :

– Introduction to Game Theory ; M. Osborne ; Oxford University Press
– Game Theory Online ; M. Jackson, Y. Shoham and K. Leyton-Brown ; YouTube

Chapitre 2

La modélisation des jeux

Dans ce chapitre nous aborderons les différentes manières de modéliser les jeux à travers quelques exemples et définitions. Les méthodes de résolution seront détaillées par la suite. N'essayez donc pas pour l'instant prédire ce que les joueurs vont jouer mais uniquement de comprendre leur représentation !

Afin de décrire ou de modéliser un jeu (c'est-à-dire une situation d'interaction décisionnelle) quatre éléments doivent être précisés :
- l'ensemble des joueurs (ou preneurs de décisions)
- les actions possibles pour chaque joueur
- les règles du jeu spécifiant notamment l'ordre dans lequel les joueurs jouent et quand le jeu se termine
- le résultat du jeu pour chaque fin possible et son implication en termes de "fonction de paiement" (pour cela il faut connaître les préférences des joueurs)

2.1 Jeux sous forme extensive

La modélisation sous forme extensive est un des moyens les plus simples de représenter un jeu. Il s'agit d'un modèle où les joueurs choisissent séquentiellement leurs actions, jusqu'au moment où le jeu est déclaré fini.

2.1.1 Représentation et définition

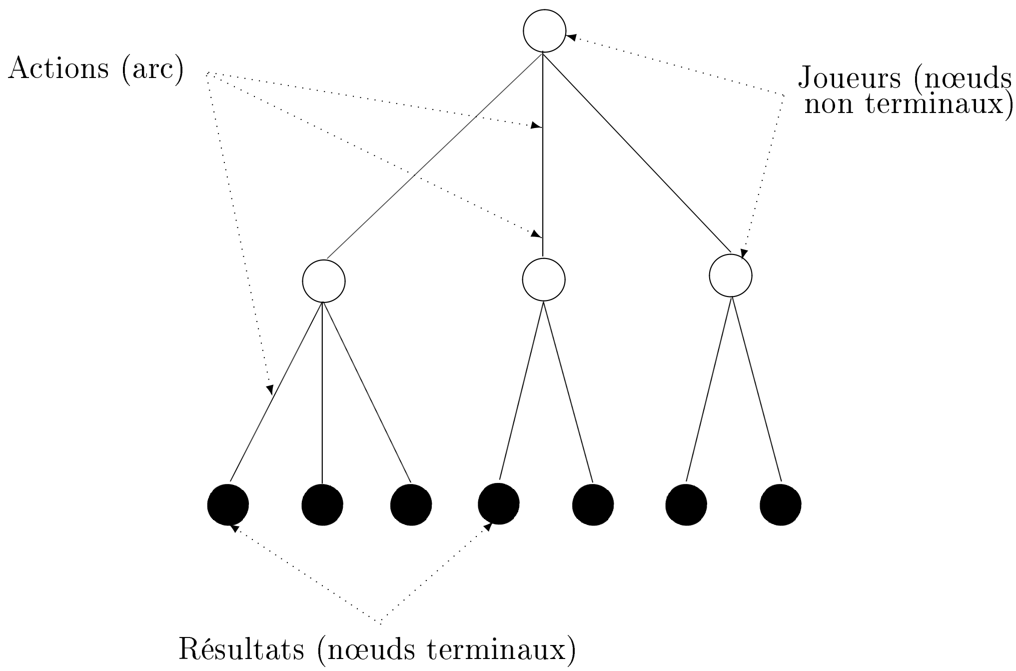
Avant de définir précisément les différentes composantes de cette modélisation, commençons par un exemple permettant de les illustrer.

Exemple 2.1 *Un joueur en fonction de monopole, le "titulaire", est confronté à la possible entrée d'un challenger (le challenger peut, par exemple, être une firme désirant entrer sur un marché régit par un monopole ; un homme politique désirant prendre le contrôle d'un parti ; ou un animal souhaitant entrer en compétition pour obtenir le droit de s'accoupler avec un de ses congénères du sexe opposé). Le challenger peut entrer ou non. Si il entre, le "titulaire" peut accepter ou se battre.*

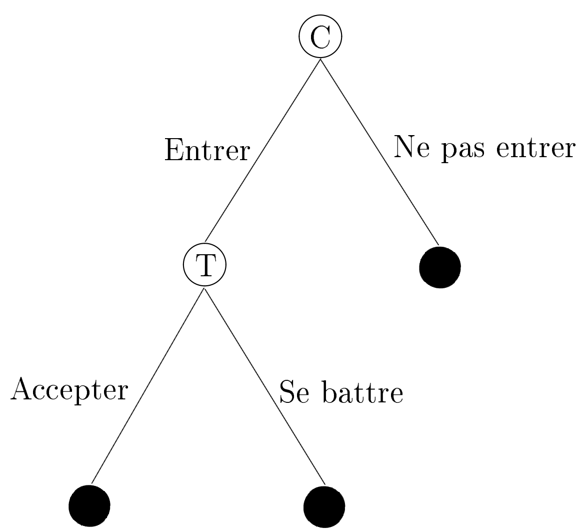
Les résultats possibles du jeux sont ainsi *(Entrer, Accepter)*, *(Entrer, Se battre)* ou *(Ne pas entrer)*. Les règles du jeux spécifient par ailleurs que le challenger joue le premier et que le titulaire ne joue que si le challenger a joué "Entrer".

Au début d'un jeu séquentiel et après chaque séquence d'événements, un joueur choisit une action. L'ensemble des actions disponibles pour un joueur ne doit pas nécessairement être donné explicitement dans la description du jeu. Il suffit que la description du jeu spécifie les différents résultats et la séquentialité du jeu pour qu'on puisse en déduire l'ensemble des actions disponibles.

Représentation graphique : Tout jeu sous forme extensive peut être représenté par un arbre (graphe connexe sans cycle) où
- à chaque nœud terminal correspond un résultat du jeu
- à chaque nœud non terminal est associé un joueur : arrivé à ce point du jeu, c'est à son tour de jouer.
- chaque arc représente chacune des actions que ce joueur peut prendre à ce point du jeu



L'exemple 2.1 peut donc être représenté comme suit :



2.1.2 Jeux en information parfaite

Définition 2.1 *Un jeu sous forme extensive, en information parfaite, est défini par*
- *l'ensemble des joueurs* $i \in \{1, 2, ..., N\}$
- *l'arbre du jeu : constitué d'un ensemble fini de nœuds* $T = \{t_1, t_2, ..., t_k\}$ *muni d'une relation de "succession" :*
  - *le nœud initial (début du jeu) n'est le successeur d'aucun autre nœud*
  - *chaque nœud (non initial) est le successeur d'un seul nœud*
  - *les nœuds terminaux n'ont pas de successeurs*
    (on note $s(t)$*, l'ensemble des successeurs d'un nœud* t*)*
- *à chaque nœud* t *(non terminal) est associé un joueur* $i(t)$*. A ce point du jeu c'est à* $i(t)$ *de jouer*
- *à chaque nœud* t *est associé un ensemble d'actions* $A(t)$*, à chaque action correspond un nœud successeur unique dans* $s(t)$
- *à chaque nœud terminal* z *est associé un vecteur de paiements.* $u(i, z)$ *est le gain du joueur* i *si le jeu se termine au nœud* z

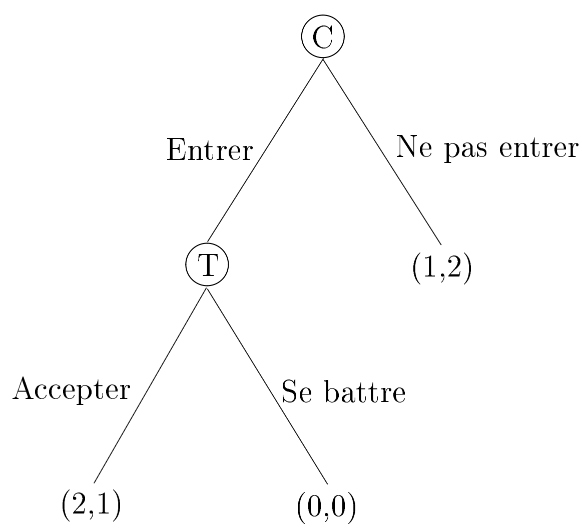
Remarque 1 *Un jeu sous forme extensive peut aussi être défini sans recours à un arbre. La définition nécessite alors l'introduction du concept de "séquence d'événements".*

Définition 2.2 *Un jeu sous forme extensive en information parfaite consiste en :*
- *un ensemble de joueurs*
- *un ensemble de séquences (histoires terminales) tel qu'aucune séquence n'est sous-séquence d'une autre séquence*
- *une fonction (la fonction joueur) qui assigne un joueur à chaque sous-séquence d'une histoire terminale*
- *pour chaque joueur, des préférences sur l'ensemble des histoires terminales*

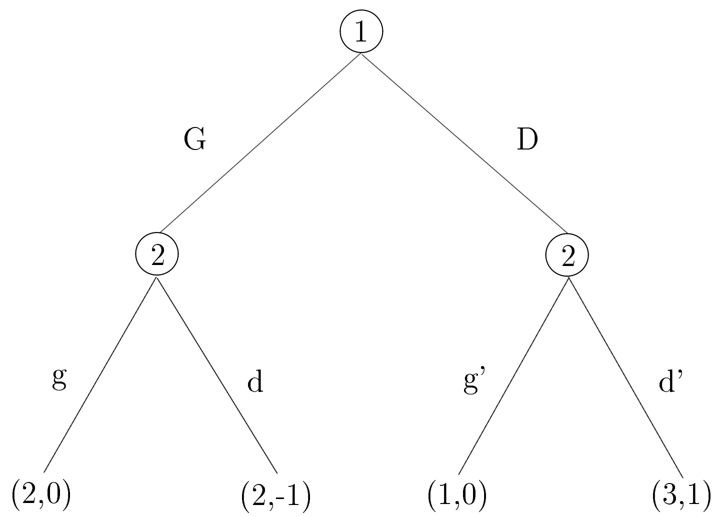
Comme indiqué dans la section précédente, il est possible représenter les préférences en utilisant des fonctions de paiement. Dans la plupart des situations, des résultats sont associés à chaque histoire terminale et les préférences peuvent être définies sur ces résultats (plutôt que sur les histoires terminales). Par ailleurs, si on modélise le choix en prix d'entreprises, on peut raisonner en termes de profit (*i.e.* le résultat d'un profil de prix) plutôt qu'en termes de profil de prix. Cependant, n'importe quelles préférences sur les résultats (par exemple les profits) peuvent-être directement traduites en termes de préférences sur les histoires terminales (par exemple les profils de prix).

Exemple 2.2 *Dans l'exemple précédent, supposons que le meilleur résultat pour le challenger soit d'entrer sur le marché et que le titulaire accepte, et que le moins bon résultat soit d'entrer et que le titulaire se batte. Au contraire, le meilleur résultat pour le titulaire est que le challenger n'entre pas et le pire est qu'il rentre puis qu'il y ait une bataille. Cette situation peut être modélisée comme suit.*

- *Les joueurs : le titulaire et le challenger*
- *Les histoires terminales : (Entrer, Accepter), (Entrer, Se battre) et (Ne pas entrer)*
- *La fonction joueur :* $P(\emptyset) = Challenger$ *et* $P(Entrer) = Titulaire$
- *Préférences : Les préférences du challenger peuvent être représentées par la fonction de paiement* u_1 *pour laquelle :* u_1*(Entrer, Accepter)* $= 2$, u_1*(Ne pas entrer)* $= 1$ *et* u_2*(Entrer, Se battre)* $= 0$. *De même les préférences du titulaire peuvent être formalisées par la fonction de paiement* u_2 *avec :* u_2*(Ne pas entrer)* $= 2$, u_2*(Entrer, Accepter)* $= 1$ *et* u_2*(Entrer, Se battre)* $=$ 0.



Exemple 2.3 ***Exemple récurrent*** *Soit un jeu à deux joueurs, dans lequel chaque joueurs a deux actions possibles : aller à droite ou aller à gauche. Le joueur ① joue en premier. Chaque joueur préfère être à droite si l'autre y est aussi, sinon il préfère être à gauche.*



Exercice 2.1 ***Grab the dollar***. *Exemple d'enchère à fond perdu. L'organisateur (extérieur) du jeu met aux enchères une pièce de 2€. A chaque tour, séquentiellement, un joueur décide où non d'enchérir un euro de plus pour obtenir cette pièce. Chaque euro enchéri revient à l'organisateur. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur a enchéri plus que l'autre dans le même nombre de tours. Alors le joueur ayant enchéri le plus remporte les 2€. Représenter ce jeu.*

Exercice 2.2 ***Fort Boyard - Le jeu des bûchettes*** *Cinq bûchettes sont disposées sur une table. A chaque tour, séquentiellement, un joueur prend de une à trois bûchettes. Le joueur prenant la dernière bûchette perd. Représenter ce jeu.*

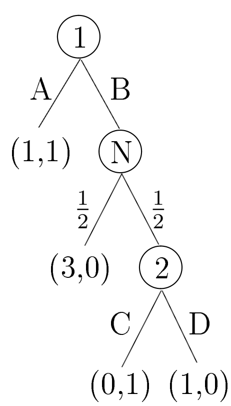
2.1.3 L'introduction du joueur Nature

Le modèle de jeu sous forme extensive avec information parfaite ne permet pas de rendre compte d'événements aléatoires pouvant intervenir durant le jeu. Cependant, il peut être aisément étendu pour couvrir de telles situations. La définition d'un jeu sous forme extensive avec joueur "Nature" est une variante de la définition précédente dans laquelle :
- la fonction joueur assigne la "Nature" à certaine sous-séquences (on ajoute un nouveau joueur)
- les probabilités de chacune des actions de la "Nature" sont spécifiées
- les préférences des joueurs sont définies sur l'ensemble des loteries d'histoires terminales (et non plus sur les histoires terminales elles-mêmes)

Pour que l'analyse reste simple, on supposera que les événements aléatoires après une certaine histoire (sous-séquence) sont indépendants des événements aléatoires après les autres sous-séquences.

Exemple 2.4 *Considérons un jeu à deux joueurs dans lequel le joueur ① doit d'abord choisir entre les actions A et B. Si il choisit A le jeu s'arrête avec des paiements (1,1). Si il choisit B :*
- *avec probabilité* 1/2 *le jeu s'arrête et les paiements sont (3,0), et*
- *avec probabilité* 1/2 *le joueur ② peut choisir entre les actions*
  - *C qui donne un paiement (0,1) et*
  - *D qui donne un paiement (1,0).*

Un jeu sous forme extensive qui modélise cette situation peut être représente comme suit :



Où N représente le joueur "Nature" et où les nombres à côté des actions de N représentent la probabilité que cette action soit "choisie".

2.1.4 Jeux en information imparfaite et ensemble d'information

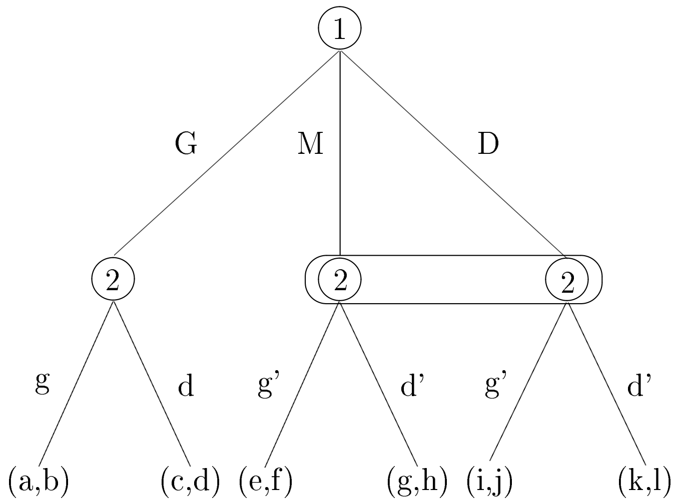
La notion de jeu sous forme extensive avec information parfaite (ou complète) définie jusqu'ici permet de modéliser des situations dans lesquelles, chaque joueur, avant de choisir l'action à entreprendre, est informé des actions choisies précédemment par chacun des autres joueurs.

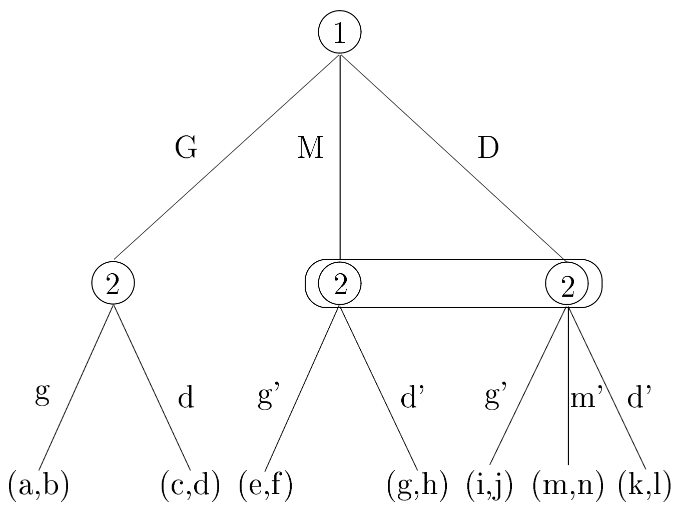
Pour décrire un jeu avec information parfaite, on a besoin d'un ensemble de joueurs, d'un ensemble d'histoires terminales, d'une fonction joueur et des préférences des agents (cf. Définition 2.2). Pour décrire un jeu sous forme extensive avec information imparfaite, il est nécessaire d'ajouter un unique item à la liste : la spécification de l'information que possède chaque joueur avant chacun de ses mouvements.

Soit H_i l'ensemble des histoires après lesquelles le joueur i bouge. On définit l'information du joueur i en partitionnant (divisant) H_i en une collection d'**ensembles d'information**. Cette collection est appelée **partition de l'information** de i. Quand il prendra sa décision, le joueur i sera alors informé de l'ensemble d'information dans lequel on se trouve mais ne pourra distinguer les histoires à l'intérieur de cet ensemble.

Supposons par exemple que le joueur i joue après les histoires G, M et D : $H_i = \{G, M, D\}$ et sait uniquement distinguer G des deux autres. La partition de l'information de i consiste donc en deux ensembles d'information : $\{G\}$ et $\{M, D\}$. Si au contraire il n'est pas du tout informé de l'histoire sa partition de l'information n'est composé que de l'ensemble $\{G, M, D\}$. Enfin, en information complète, l'information est partitionnée en singletons : $\{G\}$, $\{M\}$ et $\{D\}$.

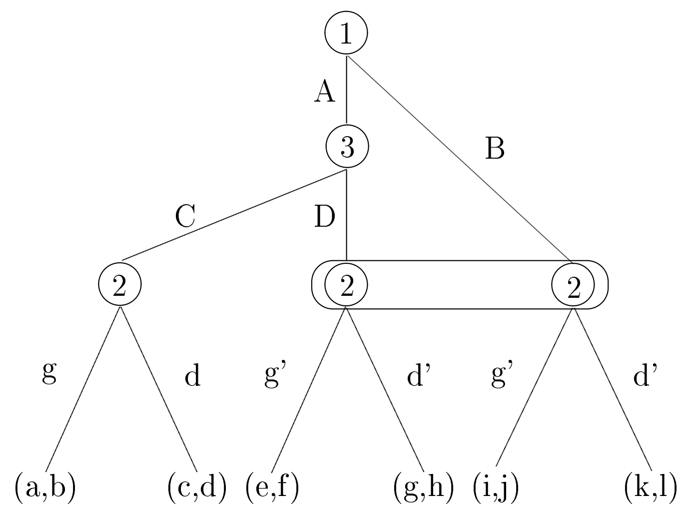
Dans l'arbre du jeu, la partition de l'information est représentée en entourant les nœuds d'un même ensemble d'information. Il faut, pour que les règles du jeu fonctionnent, que les nœuds appartenant à un même ensemble d'information aient les mêmes actions possibles.





Ce dernier jeu est faux, car pas cohérent. N'ayant pas les mêmes actions possibles après les situations M et D, le joueur ② sait distinguer entre les deux histoires.

De même, le concept d'information imparfaite n'est pas applicable à des jeux dans lesquels le joueur peut discerner dans quelle situation il se trouve en fonction du joueur qui a joué avant lui (on parlera alors de "jeu à mémoire parfaite").



Le graphe ci-dessus n'est pas cohérent : le joueur ② peut savoir s'il est en D ou B en fonction de l'identité du joueur qui a joué avant lui.

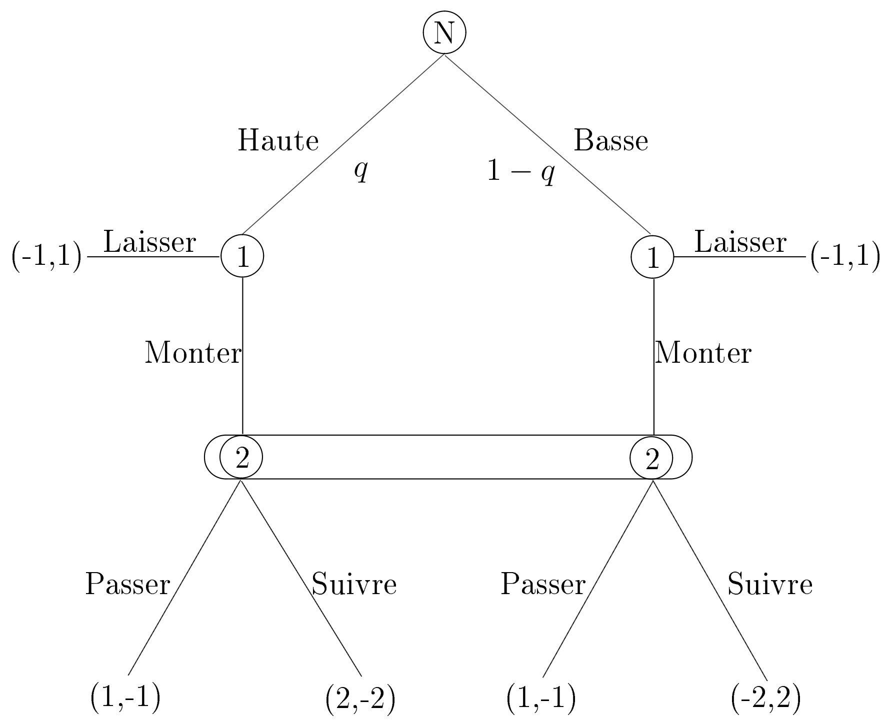
La plupart des jeux sous forme extensive avec information imparfaite intéressants contiennent également du hasard, ainsi la définition suivante contient les deux concepts.

Définition 2.3 *Un jeu sous forme extensive, en information imparfaite (avec hasard), est défini par*
- *un ensemble de joueurs*
- *un ensemble de séquences (histoires terminales) tel qu'aucune séquence n'est sous-séquence d'une autre séquence*
- *une fonction (la fonction joueur) qui assigne un joueur ou la "nature" à chaque sous-séquence d'une histoire terminale*
- *une fonction qui assigne pour chaque sous-séquence à laquelle le joueur "nature" est associé (par la fonction joueur) une distribution de probabilités sur les actions disponibles après cette histoire (les différents distributions étant indépendantes les unes des autres)*

- *pour chaque joueur, une partition (la partition de l'information) de l'ensemble des histoires qui lui sont assignées par la fonction joueur.*
- *pour chaque joueur, des préférences sur les loteries d'histoires terminales*

Exemple 2.5 *Chacun des deux joueurs commence par mettre un euro dans le pot. On donne au joueur ① une carte qui peut être Haute avec probabilité q ou Basse avec probabilité $(1-q)$. Il observe la carte mais le joueur ② ne l'observe pas. Il peut "laisser" ou "monter". Si il "laisse", le joueur ② prend le pot et le jeu s'arrête. Si le joueur ① "monte", il rajoute 1€ dans le pot et le joueur ② a le choix entre "passer" et "suivre". Si il passe, le joueur ① prend le pot. Si le joueur ② "suit", il ajoute 1€ dans le pot et le joueur ① montre la carte. Si elle est Haute, le joueur ① prend le pot, sinon le joueur ② le prend.*

Ce jeu peut être représenté comme suit :



Le joueur ① a deux ensembles d'information, un contenant l'histoire unique Haute et l'autre contenant l'histoire unique Bas. Le joueur ② a un ensemble d'information qui consiste en deux histoires : {Haute, Monter} et

{Bas, Monter}. Cet ensemble d'information reflète le fait que le joueur ② ne peut pas observer le carte du joueur ①. Notez ici que la condition qui veut que l'ensemble des actions disponibles après chaque histoire d'un ensemble d'information soit le même est ici satisfaite.

2.2 Jeux sous forme stratégique (ou normale)

Le modèle de jeux sous forme stratégique supprime la structure séquentielle de la prise de décision. Quand elle est appliquée à des situations dans lesquelles les preneurs de décisions jouent séquentiellement, elle oblige à supposer que les joueurs choisissent leur stratégie une fois pour toute. Ils sont alors engagés dans cette stratégie et ne peuvent pas la modifier à mesure que le jeu se déroule.

Cette modélisation est toutefois très utile pour décrire des situations dans lesquelles les joueurs jouent en même temps. Le plus connu des jeux sous forme stratégique est le **dilemme du prisonnier**. Ce jeu, joué entre deux suspects d'un crime, tire son importance du fait qu'il existe un très grand nombre de situations dans lesquelles le même type d'incitations sont présentes

Exemple 2.6 ***Le dilemme du prisonnier :*** *Deux suspects d'un crime majeur sont détenus dans des cellules séparées. La police a assez de preuves pour condamner chacun d'entre eux pour des crimes mineurs mais pas assez pour les condamner pour le crime majeur, à moins que l'un d'entre eux ne dénonce l'autre. Si les deux suspects se taisent, ils seront chacun condamnés à un an de prison. Si seulement l'un d'entre eux dénonce l'autre, il sera libéré et utilisé en tant que témoin contre l'autre qui écopera de 10 ans de prison. Enfin si les deux dénoncent, ils passeront chacun 5 ans en prison.*

Ce jeu peut être représenté comme un jeu stratégique où :
- les joueurs sont les deux suspects
- qui ont chacun le choix entre deux actions : {Se taire, Dénoncer}

– on suppose que les préférences des joueurs sont uniquement déterminées par les années qu'ils passeront en prison. Ainsi :
u_1(Dénoncer, Se taire) $>$ u_1(Se taire, Se taire) $>$ u_1(Dénoncer, Dénoncer)$>$$u_1$(Se taire, Dénoncer), et
u_2(Se taire, Dénoncer)$>$$u_2$(Se taire, Se taire)$>$$u_2$(Dénoncer, Dénoncer)$>$$u_2$(Dénoncer, Se taire)

Par exemple, on peut spécifier : u_1(Dénoncer, Se taire)$=0$, u_1(Se taire, Se taire)$=-1$, u_1(Dénoncer, Dénoncer)$=-5$ et u_1(Se taire, Dénoncer)$=-10$. Et de manière similaire u_2(Se taire, Dénoncer)$=0$, u_2(Se taire, Se taire)$=-1$, u_2(Dénoncer, Dénoncer)$=-5$ et u_2(Dénoncer, Se taire)$=-10$.

Il est usuel de représenter un jeu fini à deux joueur sous forme stratégique par le tableau des gains. Le jeu peut alors être représenté comme suit :

		Suspect ②	
		Se taire	Dénoncer
Suspect ①	Se taire	(-1,-1)	(-10,0)
	Dénoncer	(0,-10)	(-5,-5)

Le dilemme du prisonnier modélise des situations dans lesquelles il y a un gain à la coopération (les deux joueurs préfèrent une situation dans laquelle ils se taisent tous les deux, à une situation où ils dénoncent tous les deux) mais chaque joueur à un intérêt à "free rider" ou "faire le passager clandestin" (choisir "Dénoncer"). Ce jeu est intéressant pas parce qu'on est intéressé à comprendre les intérêts des prisonniers à avouer mais parce que de nombreuses autres situations ont la même structure, par exemple :

– en économie : les questions de politique tarifaire : le concurrent qui baisse son prix gagne des parts de marché et peut ainsi augmenter ses ventes et accroître éventuellement son bénéfice... mais si son concurrent principal en fait autant, les deux peuvent y perdre.

– en biologie, pour modéliser l'évolution des comportements entre individus d'une même espèce vers des stratégies évolutivement stables. L'apparition et le maintien des comportements de coopération par exemple, se prêtent à ce type d'analyse. Le dilemme du prisonnier est un point central de la théorie du gène égoïste, puisque l'optimisation de la survie peut passer par un comportement apparemment altruiste.

– en politique internationale. Deux pays peuvent choisir de maintenir ou non une armée. Si tous deux ont une armée (de force à peu près équivalente), la guerre est moins "tentante", car très coûteuse (situation de guerre froide). Les dépenses militaires sont alors une perte nette pour les deux pays. Si un seul a une armée, il peut évidemment conquérir sans coup férir l'autre, ce qui est pire. Enfin, si aucun n'a d'armée, la paix règne et les pays n'ont pas de dépenses militaires.

Un autre exemple représentatif nous permettant d'étudier les jeux à somme nulle est le jeu d'enfant : (pierre, feuille, ciseaux). Chacun des deux joueurs doit choisir simultanément une action : pierre, feuille ou ciseaux. Il y a un cycle entre ces trois symboles : la pierre casse les ciseaux, les ciseaux coupent la feuille et la feuille recouvre la pierre. Si les deux joueurs choisissent le même symbole, alors ils font match nul. Sinon, le joueur ayant le symbole le plus fort gagne et l'autre en perd une.

Un jeu à deux joueurs pour lequel ce qui est gagné par un joueur est perdu par l'autre est appelé jeu à somme nulle.

Définition 2.4 *On dit qu'un jeu à 2 joueurs est à somme nulle si :*

$$\forall x_1, x_2 ; u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) = 0$$

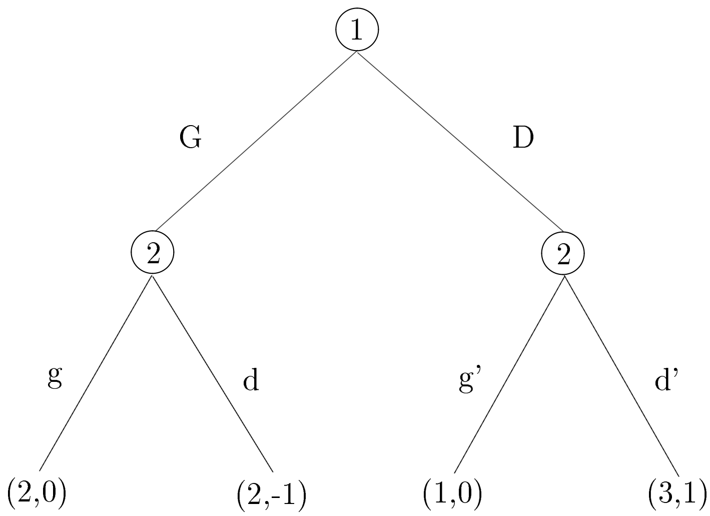
Lorsque le résultat du jeu pour un joueur est le gain la perte ou la partie nulle (sans spécification du montant en jeu), on écrit $u_i(x) = 1, -1$ ou 0.

Le jeu (pierre, feuille, ciseau) sous sa forme stratégique peut donc être décrit pas la matrice suivante

		Joueur ②		
		Pierre	Feuille	Ciseaux
Joueur ①	Pierre	(0, 0)	(-1, 1)	(1,-1)
	Feuille	(1, -1)	(0, 0)	(1,-1)
	Ciseaux	(-1, 1)	(1,-1)	(0, 0)

Comment modéliser la séquentialité d'un jeu en utilisant la représentation sous forme stratégique ?

Pour répondre à cette question considérons l'exemple 2.3



Afin de représenter ce jeu sous sa forme stratégique, il faut prendre en compte le fait que le joueur ② observe ce que ① a joué. L'action du joueur ② pourra différer selon ce qu'il s'est passé précédemment. On doit donc spécifier un plan d'action, une stratégie pour le joueur ② qui indique ce qu'il fera dans toutes les configurations du jeu.

Dans cet exemple simple, la stratégie du joueur ② peut être (g g') (si le joueur ① joue G alors je jouerai g et si le joueur ① joue D alors je jouerai g'), (g d'), (d g') ou (d d').

Sous forme stratégique, le jeu est donc représenté comme suit :

		Joueur ②			
		G D g g'	G D g d'	G D d g'	G D d d'
Joueur ①	G	(2, 0)	(2, 0)	(2,-1)	(2,-1)
	D	(1, 0)	(3, 1)	(1,0)	(3,1)

Définition 2.5 ***Stratégie et forme normale***

- *une stratégie (ex ante) est la donnée d'une liste d'actions qu'un joueur projette de jouer à chacun des nœuds (ou ensembles d'information) où il aura potentiellement la main. On note X_i l'ensemble des stratégies du joueur i pour le jeu donné.*
- *Un jeu sous forme stratégique est défini par :*
  - *l'ensemble des joueurs : N*
  - *$X = \Pi_i X_i$, l'ensemble des stratégies*
  - *Les fonctions de paiements qui spécifient le gain de chaque joueur en fonction des stratégies jouées par l'ensemble des joueurs :*

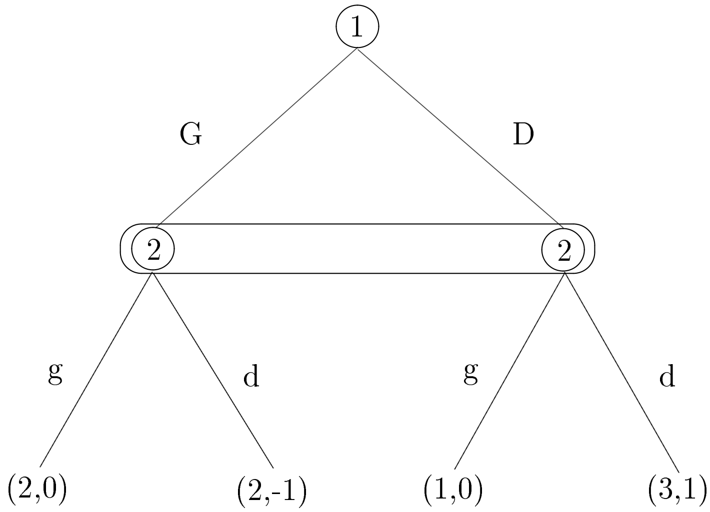
$$u_i : X \to \mathbb{R}, (x_1, x_2, ..., x_N) \mapsto u_i(x_1, x_2, ..., x_N)$$

Un jeu sous forme stratégique sera ainsi noté : $\Gamma(N, X, (u_i)_{i=1...N})$

Il est important de noter qu'une stratégie est un objet "compliqué" au sens où le joueur définit l'ensemble des actions qu'il prendra en tout point où il aura la main. Tout se passe comme si le joueur devait programmer une machine pour jouer à sa place : il ne doit pas laisser de situations imprévues (y compris celles qui pourraient apparaître absurdes).

Tout comme pour les jeux sous forme stratégique, la notion d'information est très importante.

Si on suppose dans le jeu précédent que le joueur ② ne peut pas observer (ou distinguer) ce qu'a joué le joueur ①, tout se passe comme si le jeu était simultané. Sous forme extensive, on a :



Et sous forme stratégique :

		Joueur ②	
		g	d
Joueur ①	G	(2,0)	(2,-1)
	D	(1,0)	(3,1)

Par contre, si le joueur ② est capable de distinguer entre certaines actions du joueur ① mais pas entre d'autres, comme dans l'exemple **??**, l'écriture de la stratégie devient plus complexe :

		Joueur ②			
		G (MD) g g'	G (MD) g d'	G (MD) d g'	G (MD) d d'
Joueur ①	G	(a, b)	(a, b)	(c,d)	(c,d)
	M	(e, f)	(g, h)	(e, f)	(g, h)
	D	(i, j)	(k, l)	(i, j)	(k, l)

Chapitre 3

Les concepts stratégiques

Peut-on raisonnablement prédire les comportements qui vont être adoptés par les joueurs ?

Le caractère "interactif" d'un jeu implique que la réponse à cette question n'est pas immédiate. Dans un jeu à deux joueurs par exemple, chaque joueur se pose la question de savoir quelle stratégie sera adoptée par l'autre pour réagir en conséquence. Mais il sait que l'autre est dans la même situation.

3.1 Stratégies prudente : La notion de maximin

L'analyse d'un jeu à somme nulle permet de mettre en évidence le type de problème rencontré.

Imaginons le raisonnement suivant du joueur ①. Si je joue la stratégie a_1 et que l'autre le sait, il jouera en conséquence, c'est-à-dire qu'il adoptera une stratégie qui maximise son gain pour a_1.

Comme le jeu est à somme nulle, il choisira une stratégie qui minimise en a_2 $u_1(a_1, a_2)$ (en supposant qu'une telle stratégie existe). J'obtiendrai ainsi $v_1(a_1) \equiv \min_{a_2} u_1(a_1, a_2)$. Mon choix est alors très simple : j'adopterai une stratégie qui maximise v_1, et j'obtiendrai ainsi : $\max_{a_1} \min_{a_2} u_1(a_1, a_2)$. Remarquons ici, que tout se passe comme si ① jouait "en premier" et adoptait la meilleure stratégie qui tienne compte de la réponse optimale de ②.

Définition 3.1 *Dans un jeu à somme nulle, on appelle "paiement minimum garanti du joueur ①" la valeur de* $\max_{a_1} \min_{a_2} u_1(a_1,a_2) \equiv \alpha_1$. *C'est effectivement le paiement minimum garanti dans le sens où il existe une stratégie qui assure ce paiement au joueur, cette stratégie, argmax*$_{a_1} \min_{a_2} u_1(a_1,a_2)$ *est appelée* ***stratégie prudente****.*

Un autre raisonnement est cependant possible. Le joueur ① peut parfaitement se dire que ② tiendra exactement le raisonnement précédent... Tout se passe alors comme si ① jouait en second. Si ② joue a_2 j'ai intérêt à répondre une stratégie qui maximise en a_1 $u_1(a_1,a_2)$. J'obtiendrai alors $w_1(a_2) = \max_{a_1} u_1(a_1,a_2)$, alors que ② obtiendra $v_2(a_2) \equiv \min_{a_1} u_2(a_1,a_2) = -\max_{a_1} u_1(a_1,a_2)$. Je peux en déduire que ② aura intérêt à jouer une stratégie qui maximise $v_2(a_2)$. ② obtiendra alors, $\alpha_2 = \max_{a_2} \min_{a_1} u_2(a_1,a_2) = \max_{a_2}(-\max_{a_1} u_1(a_1,a_2)) = -\min_{a_2} \max_{a_1} u_1(a_1,a_2)$ et j'obtiendrai donc $\beta_1 = \min_{a_2} \max_{a_1} u_1(a_1,a_2) = -\alpha_2$.

Remarque 2 *On a :*

$$\max_{a_1} \min_{a_2} u_1(a_1,a_2) \equiv \alpha 1 \leq \beta_1 \equiv \min_{a_2} \max_{a_1} u_1(a_1,a_2) = -\max_{a_2} \min_{a_1} u_2(a_1,a_2) = -\alpha_2$$

En effet, comme :

$$\begin{aligned} \forall a_1, a_2^0, u_1(a_1,a_2^0) &\geq \min_{a_2} u_1(a_1,a_2) \\ \Rightarrow \forall a_2^0, \max_{a_1} u_1(a_1,a_2^0) &\geq \max_{a_1} \min_{a_2} u_1(a_1,a_2) \\ \Rightarrow \min_{a_2} \max_{a_1} u_1(a_1,a_2^0) &\geq \max_{a_1} \min_{a_2} u_1(a_1,a_2) \end{aligned}$$

Ainsi, deux cas de figure peuvent se présenter :

- *Si* $\alpha_1 = \beta_1$, *c'est-à-dire si* $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$, *les deux raisonnements sont "compatibles" et on peut imaginer que chacun des deux joueurs va adopter une stratégie "prudente".*
- *Sinon,* $\alpha_1 < \beta_1$, *il y a conflit entre les deux raisonnements, chacun aimerait pouvoir jouer en second !*

Le concept de stratégie prudente peut également être utilisée dans des jeux à somme non nulle. Cela revient à supposer que le joueur ① pense que le joueur ② lui veut du mal !

Exemple 3.1 *Dans le dilemme du prisonnier :*

		Suspect ②	
		Se taire	Dénoncer
Suspect ①	Se taire	(-1,-1)	(-10,0)
	Dénoncer	(0,-10)	(-5,-5)

Le suspect ① pense que le suspect ② lui en veut. Il choisira donc toujours de le dénoncer : $\min_{a_2} u_1(\textit{Se taire}, a_2) = -10$ *et* $\min_{a_2} u_1(\textit{Dénoncer}, a_2) = -5$. *Se faisant, il va choisir lui aussi de dénoncer :* $\max_{a_1}(a_1, \textit{Dénoncer}) = -5$. *La stratégie prudente du joueur ① est donc de "Dénoncer" et son "paiement minimum garanti" est alors* -5.

3.2 La notion de dominance

Dans le cas de jeu à somme non nulle, il est toutefois difficile de supposer qu'un joueur cherche toujours à réduire le paiement de l'autre, même quand cela peut lui être défavorable. Cela peut parfois aboutir à des comportements non rationnels (dans le sens où le joueur ne choisit pas alors la "meilleure" action au sens de ses préférences).

Les notions de dominance et de stratégies dominées permettent de "corriger" ce problème. Elles permettent – en se basant sur le concept de rationalité – de réduire le champ des actions qui vont être analysées.

Exemple 3.2 *Considérons le jeu suivant :*

		Joueur ②		
		L	M	R
Joueur ①	T	(1,0)	(1,2)	(0,1)
	B	(0,3)	(0,1)	(2,0)

Comparons les stratégies M et R pour le joueur ②. On observe que :
- *Si le joueur ① joue T, la stratégie M donne 2 au joueur ② alors que R lui donne seulement 1.*
- *Si le joueur ① joue B alors, la stratégie M donne 1 au joueur ② alors que la stratégie R lui donne seulement 0.*

Ainsi, indépendamment de ce que fait le joueur ①, la stratégie M donne strictement plus au joueur colonne que la stratégie R.

Définition 3.2 ***Dominance***

Étant donné un jeu sous forme stratégique $\Gamma(N, X, (u_i)_{i=1...N})$*, on dit que la stratégie* x_i^0 *est **strictement dominée** par la stratégie* x_i^1 *pour le joueur i si et seulement si :*

$$\forall x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N, u_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, ..., x_N) < u_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, ..., x_N)$$

que l'on peut réécrire sous une forme plus lisible :

$$\forall x_{-i}, u_i(x_{-i}, x_i^0) < u_i(x_{-i}, x_i^1)$$

Contre toute "défense", jouer la stratégie x_i^1 *donne toujours strictement plus au joueur i que jouer* x_i^0*.*

On dit que la stratégie x_i^0 *est **faiblement dominée** par la stratégie* x_i^1 *pour le joueur i si et seulement si :*

$$\forall x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N, u_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, ..., x_N) \leq u_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, ..., x_N)$$

que l'on peut réécrire sous une forme plus lisible :

$$\forall x_{-i}, u_i(x_{-i}, x_i^0) \leq u_i(x_{-i}, x_i^1)$$

Contre toute "défense", jouer la stratégie x_i^1 *donne toujours au moins autant au joueur i que jouer* x_i^0*.*

On dit que la stratégie x_i^0 *est **dominée** par la stratégie* x_i^1 *pour le joueur i si et seulement si :*

$$\forall x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_N, u_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, ..., x_N) \leq u_i(x_1, ..., x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, ..., x_N)$$

que l'on peut réécrire sous une forme plus lisible :

$$\forall x_{-i}, u_i(x_{-i}, x_i^0) \leq u_i(x_{-i}, x_i^1)$$

avec une inégalité stricte au moins*. Contre toute "défense", jouer la stratégie* x_i^1 *donne toujours autant et au moins une fois plus au joueur i que jouer* x_i^0*.*

On dit qu'une stratégie est dominante si elle domine toutes les autres. Si une stratégie dominante existe elle est évidemment unique, en effet si deux stratégies étaient simultanément dominantes elles donneraient les mêmes paiements au joueur, ce qui contredit l'existence d'une inégalité stricte au moins. En revanche, il peut parfaitement exister plusieurs stratégies faiblement dominantes. Il est clair que si un joueur possède une stratégie dominante il la jouera et le jeu sera résolu. En revanche la faible dominance peut ne pas déboucher...

Exemple 3.3 *Dans le dilemme du prisonnier :*

		Suspect ②	
		Se taire	*Dénoncer*
Suspect ①	*Se taire*	*(-1,-1)*	*(-10,0)*
	Dénoncer	*(0,-10)*	*(-5,-5)*

"Dénoncer" est une stratégie dominante pour chacun des deux joueurs.

Exemple 3.4 ***Le renvoi d'ascenseur** :*
Deux inconnus se retrouvent au rez-de-chaussée d'une grande tour devant un petit ascenseur à une seule place dont la porte est ouverte. Il n'y a pas de bouton pour le rappeler quand il sera monté. Les deux joueurs ont deux solutions : trahir ou coopérer. Si ils coopèrent tous les deux, un joueur monte puis renvoie l'ascenseur, les deux joueurs gagnent. Si un joueur coopère et l'autre trahit, le joueur qui trahit prend l'ascenseur, gagne, et ne le renvoie pas. Si les deux joueurs trahissent, aucun ne cède et ils sont obligés de monter à pied...les deux perdent.

		Joueur ②	
		Trahir	*Coopérer*
Joueur ①	*Trahir*	*(0,0)*	*(1,0)*
	Coopérer	*(0,1)*	*(1,1)*

Toutes les stratégies sont faiblement dominantes, elles ne sont pourtant pas équivalentes !

Exemple 3.5 ***Enchères au second prix*** *(Enchères de Vickrey)*
Un objet indivisible (par exemple un tableau) est vendu suivant la procédure suivante :
- *chaque acheteur i potentiel soumet sous enveloppe une proposition* b_i
- *l'acheteur qui soumet la plus grande offre gagne l'objet et paye pour l'acquérir le second meilleur prix offert :* $y = \max_{j \neq i} b_j$.

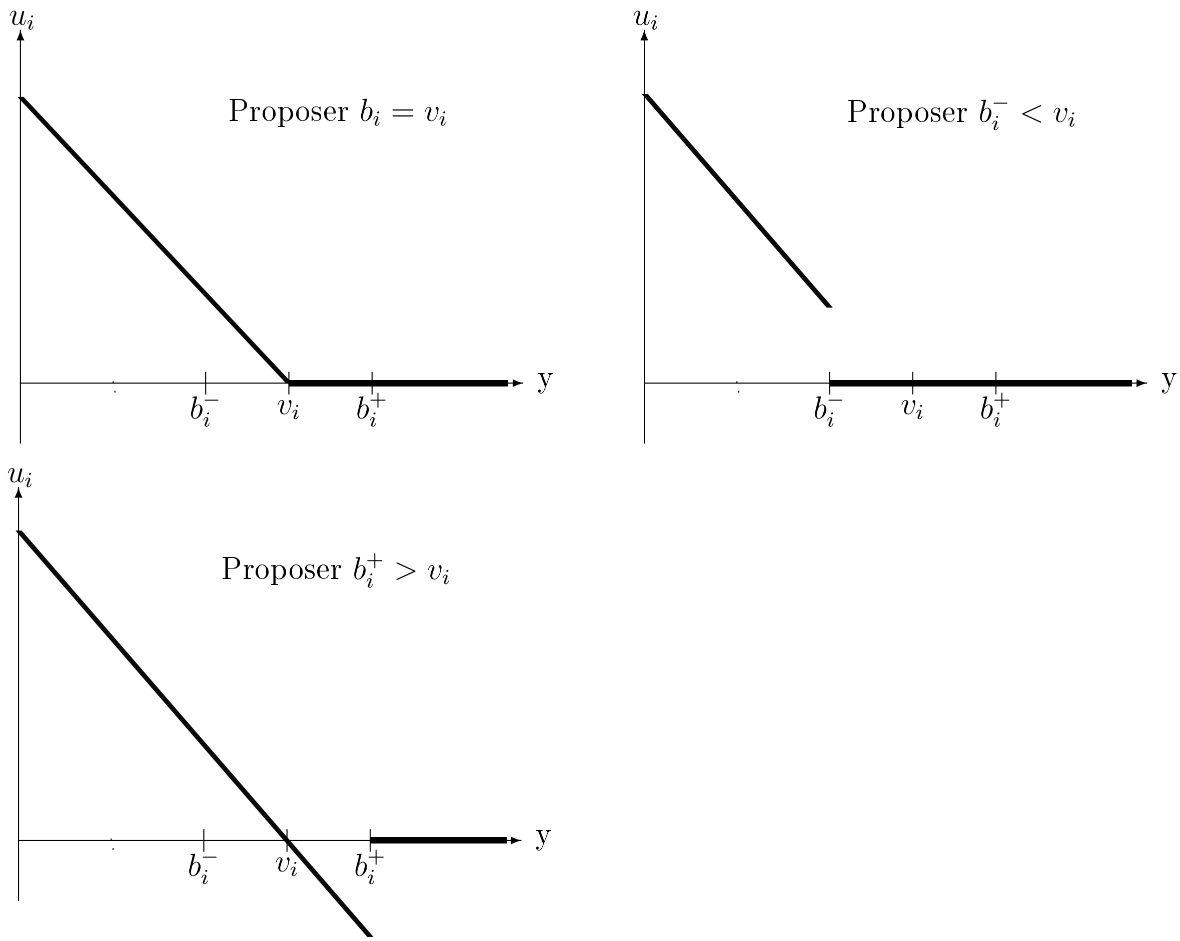
On suppose que chaque acheteur potentiel a une évaluation v_i *pour l'objet qui reflète toute valeur objective ou subjective pour lui.*

Notons ici que ce jeu est plus complexe que ceux décrit précédemment notamment parce que l'ensemble des stratégies n'est pas fini (c'est un continuum).

On peut cependant remarquer que dire la vérité ($b_i = v_i$) *est une stratégie dominante, c'est-à-dire que cette stratégie domine toutes les autres.*

Un acheteur fera une bonne affaire dès qu'il payera l'objet à un prix inférieur à son évaluation v_i *(paiement* $v_i - y > 0$*) et une mauvaise quand le payera à un prix supérieur à* v_i *(paiement* $v_i - y < 0$*). Par ailleurs, on peut remarquer que conditionnellement au fait d'avoir gagné l'enchère, le prix payé par l'acquéreur et indépendant de son offre. Ainsi*
- *si* $b_i = v_i$
  1. *si* $y > v_i$*, i perd l'enchère (paiement nul)*
  2. *si* $y < v_i$*, i gagne l'enchère et paye l'objet au prix* $y < v_i$ *(bonne affaire, paiement positif)*
- *si* $b_i > v_i$
  1. *si* $y > v_i$ *: 2 cas*
     a. *si* $y > b_i > v_i$*, i perd l'enchère (paiement nul)*
     b. *si* $b_i > y > v_i$*, i gagne l'enchère et paye l'objet au prix* $y > v_i$ *(mauvaise affaire, paiement négatif)*
  2. *si* $y < v_i$*, i gagne l'enchère et paye l'objet au prix y (bonne affaire, paiement positif)*
- *si* $b_i < v_i$
  1. *si* $y > v_i$*, i perd l'enchère (paiement nul)*
  2. *si* $y < v_i$ *: 2 cas*
     a. *si* $y < b_i < v_i$ *i gagne l'enchère et paye l'objet au prix* $y < v_i$ *(bonne affaire, paiement positif)*
     b. *si* $b_i < y < v_i$*, i perd l'enchère (paiement nul)*

Il apparaît donc que proposer $b_i = v_i$ donne un paiement au moins égal à celui de toutes autres stratégies et parfois strictement plus. En d'autre termes, la stratégie $b_i = v_i$ est une stratégie dominante. On peut aussi le voir graphiquement avec y en abscisse et le paiement du joueur i en ordonnée :



Exemple 3.6 ***La fourniture d'un bien public***
Le gouvernement se demande si il doit mettre en place un projet public qui coûte c M€. Chacun des n citoyens accorde une valeur v_i (négative ou positive) à ce projet, c'est son consentement à payer pour le bien public. Si le gouvernement observait ces c.a.p. il mettrait en place le projet ssi $\sum_{i=1}^n v_i \geq c$. Si il n'observe pas ces c.a.p., il doit se reposer sur ce que déclarent les citoyens : w_i. Le projet est alors mis en place ssi $\sum_{i=1}^n w_i \geq c$. Le problème est alors que les citoyens peuvent sur- ou sous-estimer leur consentement à payer.

Question : *Quelles incitations (subvention/taxe) mettre en place afin que les citoyens révèlent leur vrai valeur ?*
Réponse : *Si chaque citoyen i reçoit $\sum_{i \neq j} w_j - c$ quand le projet est mis en place (si cette grandeur est négative il s'agit d'une taxe) alors dire la vérité domine toutes les autres stratégies*

Remarque : *Comme dans le cas de l'enchère au second prix, ce que doit payer le citoyen (ou ce qu'il reçoit) ne dépend pas de son "offre"*

L'utilité/le paiement d'un citoyen i s'écrit alors :

$$U_i = \begin{cases} v_i + \sum_{i \neq j} w_j - c & si \sum_i w_i \geq c \\ 0 & sinon \end{cases}$$

On doit alors considérer deux cas :

1. *si $v_i + \sum_{i \neq j} w_j - c \geq 0$*
   - *si i dit la vérité $w_i = v_i$ alors $\sum_i w_i - c \geq 0$, le projet est mis en place et $U_i = \sum_i w_i - c \geq 0$*
   - *si i surestime son c.a.p alors le projet est mis en place et son utilité ne change pas*
   - *si il le sous-estime,*
     - *soit $\sum_i w_i - c < 0$ et le projet n'est pas mis en place, alors son utilité devient nulle*
     - *soit $\sum_i w_i - c \geq 0$ et l'utilité de i ne change pas*
2. *si $v_i + \sum_{i \neq j} w_j - c < 0$*
   - *si i dit la vérité $w_i = v_i$ alors $\sum_i w_i - c < 0$, le projet n'est pas mis en place et $U_i = 0$*
   - *si i sous-estime son c.a.p alors le projet n'est pas mis en place et son utilité ne change pas*

- *si il le sur-estime,*
  - *soit* $\sum_i w_i - c \geq 0$ *et le projet est mis en place, alors son utilité devient négative* ($U_i = v_i + \sum_{i \neq j} w_j - c < 0$)
  - *soit* $\sum_i w_i - c < 0$ *et l'utilité de* i *ne change pas*

Ainsi la stratégie "$w_i = v_i$*" est une stratégie dominante.*
Comment faire en sorte que ce mécanisme ne soit pas (trop) coûteux pour le gouvernement ?

On sait que

$$U_i = \begin{cases} v_i + \sum_{j \neq i} w_j - c & si\ \sum_{i=1}^n w_i \geq c \\ 0 & sinon \end{cases}$$

marche.
Trouvons donc h_i *tel que*

$$U_i = \begin{cases} v_i + \sum_{j \neq i} w_j - c - h_i & si\ \sum_{i=1}^n w_i \geq c \\ 0 + h_i & sinon \end{cases}$$

marche aussi

Exercice 3.1 *Montrez qu'avec*

$$h_i = \begin{cases} \sum_{j \neq i} w_j - c & si\ \sum_{j=i} w_j \geq c \\ 0 & sinon \end{cases}$$

dire la vérité est stratégie dominante.

On a alors

$$U_i = \begin{cases} v_i & si\ \sum_{i=1}^n w_i \geq c\ et\ \sum_{j \neq i} w_j \geq c & (1) \\ v_i + \underbrace{\sum_{j \neq i} w_j - c}_{<0} & si\ \sum_{i=1}^n w_i \geq c\ et\ \sum_{j \neq i} w_j < c & (2) \\ \underbrace{-\sum_{j \neq i} w_j + c}_{<0} & si\ \sum_{i=1}^n w_i < c\ et\ \sum_{j \neq i} w_j \geq c & (3) \\ 0 & si\ \sum_{i=1}^n w_i < c\ et\ \sum_{j \neq i} w_j < c & (4) \end{cases}$$

La différence en (1) et (3) vient uniquement de w_i *de même que la différence entre (2) et (4). On a ainsi à faire à mécanisme dit "de pivot" : on fait payer à celui qui fait basculer la décision un montant égal à la perte qu'il fait subir aux autres.*

3.3 Élimination successive des stratégies dominées

Reprenons l'exemple 3.2

		Joueur ②		
		L	M	R
Joueur ①	T	(1,0)	(1,2)	(0,1)
	B	(0,3)	(0,1)	(2,0)

On a vu que la stratégie R était strictement dominée par la stratégie M pour le joueur ②. Il parait naturel et logique de supposer que si il est rationnel (si il cherche à maximiser son "paiement"), ② ne va jamais jouer R.

Hypothèse H1 : Un joueur rationnel ne joue jamais une stratégie strictement dominée.

Hypothèse H2 : Tous les joueurs sont rationnels.

Maintenant, si le joueur ① connaît les stratégies et les paiements du joueur ② et s'il sait que le joueur ② est rationnel, alors, il peut anticiper que le joueur ② ne va jamais jouer R (sa stratégie strictement dominée). Donc, si on est dans une situation où la rationalité de chacun des joueurs est une connaissance commune (chacun est rationnel, chacun sait que les autres sont rationnels, chacun sait que les autres savent qu'il est rationnel...etc) alors la stratégie strictement dominée R peut être éliminée (dans le sens où tout le monde se comporte comme si cette stratégie n'existait pas). La connaissance commune de la rationalité et des paiements est importante car sinon l'élimination ne peut pas se faire.

Hypothèse H3 : La rationalité et le jeu sont une connaissance commune entre les joueurs

Ainsi, sous H1, H2 et H3, un bon concept de solution doit exclure toutes les stratégies strictement dominées : la dite solution du jeu est la même si on élimine de telles stratégies car elles ne sont pas jouées et tout le monde le sait.

Dans notre exemple, la stratégie R peut être éliminée. Les joueurs considèrent donc qu'ils jouent le jeu suivant :

		Joueur ②	
		L	M
Joueur ①	T	(1,0)	(1,2)
	B	(0,3)	(0,1)

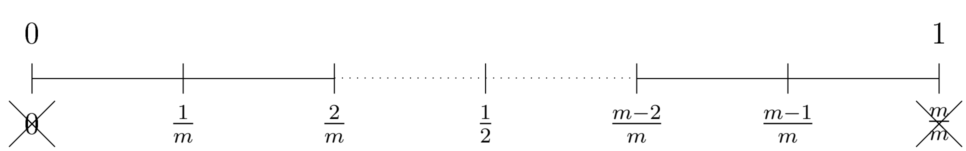
Or, dans ce nouveau jeu, la stratégie B est strictement dominée par T. Ainsi, B peut être éliminée. On obtient donc le nouveau jeu réduit suivant :

		Joueur ②	
		L	M
Joueur ①	T	(1,0)	(1,2)

Dans ce "nouveau" jeu, L peut être éliminée. Ceci nous amène à un jeu où chaque joueur possède une unique stratégie : pour le joueur ① T et pour le joueur ② M avec (1, 2) comme paiement.

Ce procédé est appelé **procédé d'élimination des stratégies strictement dominées**. Quand ce procédé converge vers un unique résultat, on qualifie ce résultat comme étant la solution du jeu et on dit que le jeu est **solvable par dominance**.

Exemple 3.7 *Soit une élection entre deux candidats. On suppose que les électeurs sont uniformément distribués sur le segment $[0, 1]$ et qu'ils votent pour le candidat le plus proche d'eux sur ce segment. On suppose par ailleurs que les candidats n'ont que $m + 1$ positions possibles (m pair) régulièrement distribuées sur le segment.*



On peut alors remarquer que la position $\frac{m}{m} = 1$ est strictement dominée par la position $\frac{m-1}{m}$:

– si l'autre candidat est à gauche de $\frac{m}{m}$, le candidat en $\frac{m}{m}$ gagne à se déplacer
– si l'autre candidat est également en $\frac{m}{m}$ aussi
De même 0 est strictement dominé par $\frac{1}{m}$.
On se retrouve donc avec $m-1$ positions possibles.
Avec le même raisonnement on a alors $\frac{m-1}{m}$ strictement dominé par $\frac{m-2}{m}$ et $\frac{1}{m}$ strictement dominé par $\frac{2}{m}$ $\Rightarrow$ $m-3$ positions $\Rightarrow$ ... $\Rightarrow$ le jeu est solvable par dominance et la solution est $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

Remarque 3 *L'élimination successive des stratégies strictement dominées ne dépend pas de l'ordre d'élimination, ni du fait que les joueurs éliminent de façon séquentielle ou simultanée.*

De la même façon, on aurait donc envie encore d'affirmer qu'une stratégie dominée (non strictement) peut être éliminée car il existe une autre stratégie qui donne autant sinon strictement plus. Cependant, contrairement au cas des stratégies strictement dominées, le jeu résultant (et donc le résultat) de l'élimination successive des stratégies seulement dominées (non strictement) peut dépendre de l'ordre suivant lequel les éliminations se font.

Exemple 3.8

		Joueur ②		
		L	*C*	*R*
	T	*(1,2)*	*(2,3)*	*(0,3)*
Joueur ①	*M*	*(2,2)*	*(2,1)*	*(3,2)*
	B	*(2,1)*	*(0,0)*	*(1,0)*

ordre d'élimination	*résultat*	*paiement final*
T,R,B,C	*ML*	*(2,2)*
B,L,C,T	*MR*	*(3, 2)*

Exercice 3.2 *Chaque joueur doit donner un nombre entier entre 0 et 100, on calcule la moyenne, le gagnant est celui dont le pari est le plus proche de la* ***demi-moyenne****.*

3.4 Équilibre de Nash en stratégie pure

Évidemment, les concepts précédents peuvent ne rien donner. Si aucune stratégie n'est dominée, le problème reste entier. Un concept plus faible permet, dans un grand nombre de cas une résolution intéressante des jeux. Le jeu suivant illustre bien cette situation :

		Joueur ②		
		L	M	R
Joueur ①	T	(0,6)	(6,0)	(4,3)
	M	(6,0)	(0,6)	(4,3)
	B	(3,3)	(3,3)	(5,5)

Aucune stratégie n'est dominante. Cependant, il y a un candidat potentiel pour la solution du jeu : la paire de stratégies (B,R) donnant le paiement (5, 5). En quel sens ? En fait, s'il est suggéré (par quelqu'un, par un raisonnement commun aux joueurs, après une négociation,...) que (B,R) doit être joué, alors, aucun joueur n'a intérêt à changer tout seul en jouant une autre stratégie. En effet, si par exemple le joueur ① envisage de jouer M à la place de B, il obtient seulement 4 unités (alors que son utilité en jouant B est de 5 unités). En fait, on vérifie facilement qu'aucun joueur n'a intérêt à changer seul de stratégie si (B,R) est la paire de stratégies prévue. La notion d'équilibre cachée derrière ce raisonnement est en faite l'une des plus importantes en théorie des jeux.

Supposons l'existence d'une sorte de norme sociale (ex. rouler à droite pour un conducteur de voiture) qui soit connaissance commune, et qui pour chaque interaction stratégique (ou pour la situation en question), fait qu'un joueur donné sait ce que vont faire les autres joueurs, alors pour être effectivement stable cette norme doit au moins satisfaire à ce critère : aucun joueur n'a intérêt à dévier individuellement du comportement dicté par la norme.

L'équilibre de Nash est simplement la traduction mathématique de cette notion de stabilité.

Définition 3.3 *Un profil de stratégies* $x^* = (x_i^*)_{i \in N}$ *est un équilibre de Nash du jeu sous forme stratégique* Γ *si et seulement si,* $\forall i \in N, \forall x_i \in X_i$: $u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*)$.

Une autre manière de définir l'équilibre de Nash est d'utiliser le concept de **meilleure réponse**

Définition 3.4 *On appelle correspondance de meilleure réponse du joueur i la correspondance qui à chaque vecteur de stratégies des autres joueurs associe les stratégies qui maximisent le paiement de i :*

$$MR_i : x_{-i} \mapsto arg \max_x u_i(x, x_{-i})$$

Cette correspondance est bien définie dès lors que, par exemple l'ensemble des stratégies est fini, ou bien lorsque l'ensemble des stratégies est compact et la fonction u_i continue. C'est une fonction lorsque le maximum est unique. C'est le cas lorsque la fonction u_i est strictement concave. Un équilibre de Nash est un point fixe de la correspondance de meilleure réponse :

Définition 3.5 $x^* = (x_i^*)$ *est un équilibre de Nash si et seulement si :*

$$\forall i, \forall x_i \in X_i, u_i(x_i^*, x_{-i}^*) \geq u_i(x_i, x_{-i}^*)$$

c'est-à-dire :

$$\forall i, x_i^* \in MR_i(x_{-i}^*)$$

Il est facile de voir qu'il existe des jeux pour lesquels il n'existe pas d'équilibre de Nash, d'autres où il en existe plusieurs.

Exemples

– Dilemme du prisonnier :

		Suspect ②	
		Se taire	Dénoncer
Suspect ①	Se taire	(-1,-1)	(-10,0)
	Dénoncer	(0,-10)	(-5,-5)

$D \mapsto^{MR_1} D \mapsto^{MR_2} D \Rightarrow (D, D)$ unique équilibre de Nash

$(ST \mapsto^{MR_1} D \mapsto^{MR_2} D)$

– Jeu du carrefour : 2 joueurs, pas de code de la route, les 2 voitures arrivent à la même vitesse, 2 solutions pour chaque voiture : passe (P) ou stop (S)

		Joueur ②	
		P	S
Joueur ①	P	(-1,-1)	(2,1)
	S	(1,2)	(0,0)

$P \mapsto^{MR_1} S \mapsto^{MR_2} P$ et $P \mapsto^{MR_2} S \mapsto^{MR_1} P \Rightarrow$ 2 équilibres de Nash !

Comment choisir ?

– Bataille des sexes

		Homme	
		Théâtre	Foot
Femme	Théâtre	(3,1)	(0,0)
	Foot	(0,0)	(1,3)

$T \mapsto^{MR_H} T \mapsto^{MR_F} T$ et $F \mapsto^{MR_F} F \mapsto^{MR_H} F \Rightarrow$ 2 équilibres de Nash !

– Pierre, Feuille, Ciseaux

		Joueur ②		
		Pierre	Feuille	Ciseaux
Joueur ①	Pierre	(0, 0)	(-1, 1)	(1,-1)
	Feuille	(1, -1)	(0, 0)	(-1,1)
	Ciseaux	(-1, 1)	(1,-1)	(0, 0)

$P \mapsto^{MR_i} F \mapsto^{MR_j} C$, $F \mapsto^{MR_i} C \mapsto^{MR_j} P$ et $C \mapsto^{MR_i} P \mapsto^{MR_j} F$
$\Rightarrow$ Pas d'équilibre de Nash !

– Jeu de la distinction de Bourdieu
Le joueur ① content quand il fait la même chose que ②, mais ② n'est pas content si ① fait comme lui (2 situations : pile et face)

		Joueur ②	
		P	F
Joueur ①	P	(1, -1)	(-1, 1)
	F	(-1, 1)	(1,-1)

Pas d'équilibre de Nash !

Proposition 1 – *Si le jeu est solvable par élimination répétée de stratégies faiblement dominées, alors le vecteur de stratégies qui en résulte est un équilibre de Nash du jeu initial.*
– *Si le jeu est solvable par élimination répétée des stratégies strictement dominées, alors le vecteur de stratégies qui en résulte est l'unique équilibre de Nash du jeu initial.*

3.5 Équilibre de Nash en stratégie mixte

Que faire quand il n'existe pas d'équilibre de Nash en stratégie pure ?

L'équilibre de Nash en stratégie pure est un profil d'actions pour lequel l'action de chaque joueur est optimale étant données les actions des autres. En ce point fixe, le comportement d'un joueur est le même à chaque fois qu'il joue au jeu et aucun joueur ne veut changer comportement.

Une notion plus générale de point fixe permet aux choix des joueurs de varier, tant que le "protocole" de ces choix restent constant. Par exemple, à chaque fois qu'il joue au jeu, un joueur devra choisir ses actions de manière probabiliste selon la même distribution de probabilités. On supposera alors que les joueurs basent leurs choix sur l'espérance de paiement, c'est-à-dire qu'ils sont neutres vis-à-vis du risque.

Définition 3.6 *Une stratégie mixte est une distribution de probabilités sur l'ensemble des stratégies pures (i.e. des actions)*

Reprenons le jeu de la distinction de Bourdieu :

		Joueur ②	
		P	F
Joueur ①	P	(1, -1)	(-1, 1)
	F	(-1, 1)	(1,-1)

Un stratégie mixte correspond pour chaque joueur à assigner une probabilité à chacune des actions. Soient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{① joue P}) &= p \\
\mathbb{P}(\text{① joue F}) &= 1-p \\
\mathbb{P}(\text{② joue P}) &= q \\
\mathbb{P}(\text{② joue F}) &= 1-q
\end{aligned}$$

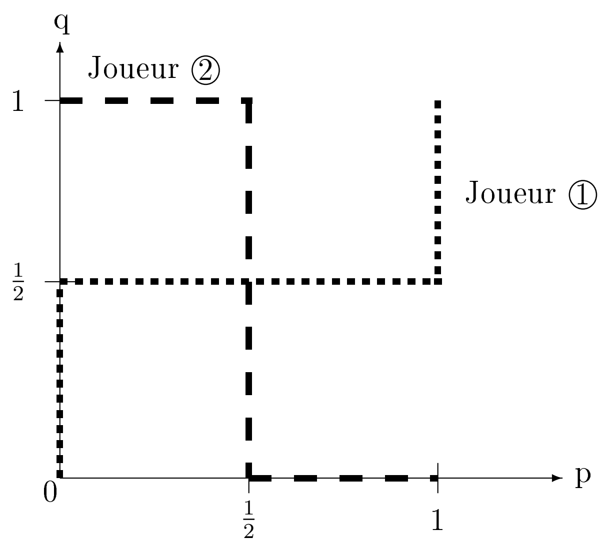
Étudions les meilleures réponses de chacun des deux joueurs (on cherche la meilleure stratégie mixte d'un joueur, à stratégie mixte de l'autre joueur fixée) :
Pour le joueur ①, jouer
- P lui donne comme paiement espéré : $1 * q + (-1) * (1-q) = 2q - 1$
- F lui donne comme paiement espéré : $(-1) * q + 1 * (1-q) = 1 - 2q$

Ainsi
- $q > 1/2 \Rightarrow P \succ F \Rightarrow p = 1$
- $q = 1/2 \Rightarrow P \sim F \Rightarrow p \in]0, 1[$
- $q > 1/2 \Rightarrow P \prec F \Rightarrow p = 0$

De même pour le joueur ②, jouer
- P lui donne comme paiement espéré : $(-1) * p + 1 * (1-p) = 1 - 2p$
- F lui donne comme paiement espéré : $1 * p + (-1) * (1-p) = 2p - 1$

Ainsi
- $p < 1/2 \Rightarrow P \succ F \Rightarrow q = 1$
- $p = 1/2 \Rightarrow P \sim F \Rightarrow q \in]0, 1[$
- $p > 1/2 \Rightarrow P \prec F \Rightarrow q = 0$

Représentons ces correspondances de meilleure réponse :



L'équilibre de Nash en stratégie mixte, point d'intersection entre ces deux correspondances de meilleure réponse est donc unique et égal à $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. Ceci est assez normal puisque le jeu est symétrique.

Définition 3.7 *Un profil de stratégies mixtes s^* est un équilibre de Nash en stratégie mixte si, pour tout joueur i et pour toute stratégie mixte s_i :*

$$\mathbb{E}(u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq \mathbb{E}(u_i(s_i, s_{-i}^*))$$

De la même façon, on montre l'équilibre de Nash en stratégie mixte du jeu Pierre, Feuille, Ciseaux correspond à une situation où les deux joueurs jouent chacune des actions avec une probabilité 1/3.

Si on applique le même raisonnement à la Bataille des sexes

		Homme	
		Théâtre	Foot
Femme	Théâtre	(3,1)	(0,0)
	Foot	(0,0)	(1,3)

en notant p et q respectivement la probabilité que la femme et l'homme choisisse le Théâtre, on a :
Pour la femme :

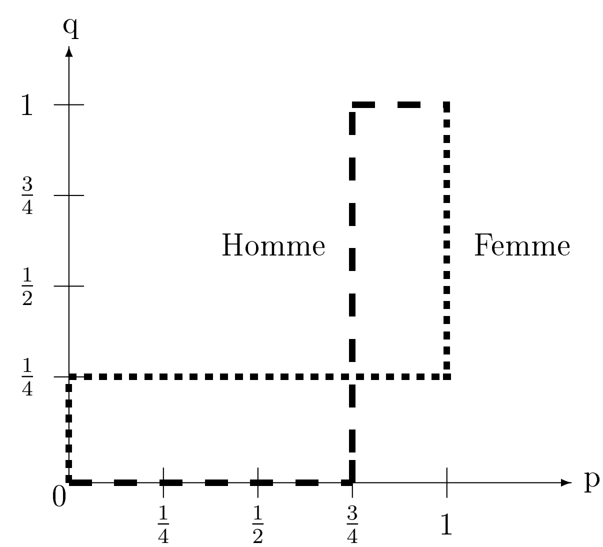
$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u_F(\text{Théâtre})) &= 3*q+0*(1-q)=3q \\ \mathbb{E}(u_F(\text{Foot})) &= 0*q+1*(1-q)=1-q \end{aligned}$$

Ainsi
- $q > 1/4 \Rightarrow T \succ F \Rightarrow p = 1$
- $q = 1/4 \Rightarrow T \sim F \Rightarrow p \in]0,1[$
- $q < 1/4 \Rightarrow T \prec F \Rightarrow p = 0$

De même, pour l'homme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(u_H(\text{Théâtre})) &= 1*p+0*(1-p)=p \\ \mathbb{E}(u_F(\text{Foot})) &= 0*p+3*(1-p)=3-3p \end{aligned}$$

Ainsi
- $p > 3/4 \Rightarrow T \succ F \Rightarrow q = 1$
- $p = 3/4 \Rightarrow T \sim F \Rightarrow q \in]0,1[$
- $p < 3/4 \Rightarrow T \prec F \Rightarrow q = 0$



Ainsi, on a 3 équilibres de Nash : $p = 3/4, q = 1/4$ (en stratégies mixtes), $p = 0, q = 0$ et $p = 1, q = 1$ (en stratégies pures)

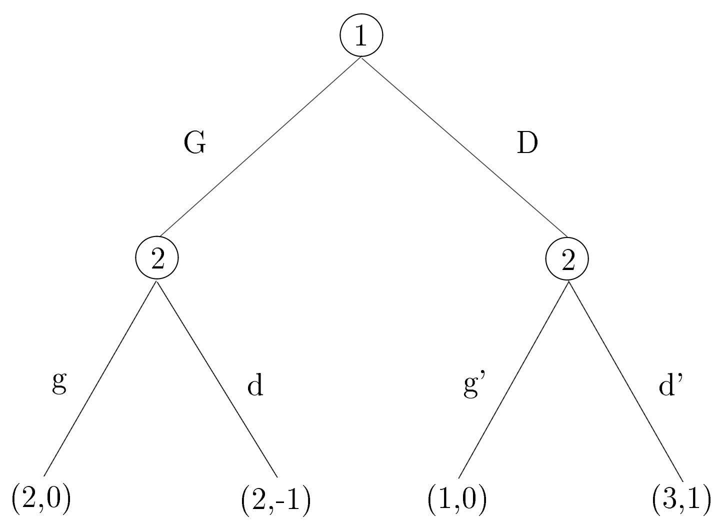
Théorème de Nash Tout jeu stratégique (avec des préférences complètes, transitives et continues) dans lequel les joueurs ont un nombre fini d'actions possède un équilibre de Nash en stratégies mixtes.

Chapitre 4

Les concepts d'équilibre dans les jeux séquentiels

4.1 Équilibre parfait : l'algorithme de Kühn

Étudions maintenant le concept d'équilibre dans le cadre d'un jeu sous forme séquentiel. Pour cela, reprenons l'exemple récurrent (2.3) et cherchons les équilibres de Nash :



Ce jeu peut également être représenté sous la forme normale suivante :

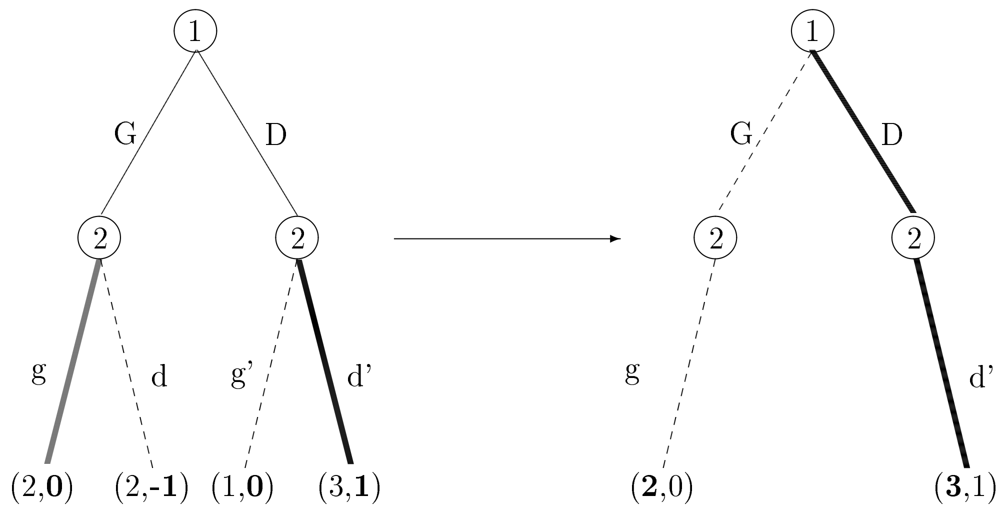
		Joueur ②			
		G D g g'	G D g d'	G D d g'	G D d d'
Joueur ①	G	(2, 0)	(2, 0)	(2,-1)	(2,-1)
	D	(1, 0)	(3, 1)	(1,0)	(3,1)

$gg' \mapsto G \mapsto \{gg', gd'\}$; $dd' \mapsto D \mapsto \{dd', gd'\}$;
$gd' \mapsto D \mapsto \{dd', gd'\}$; $dg' \mapsto G \mapsto \{gg', gd'\}$.

Il existe 2 équilibres de Nash : (gg', G) qui aboutit au paiement (2, 0) et (dd' ou gd', D) qui aboutit à (3, 1).

Le premier équilibre de Nash repose sur un comportement quelque peu surprenant : ② joue gg' c'est-à-dire qu'il "annonce" qu'il jouera g' si ① joue D. Ce qui n'est pas très rationnel puisque si ① joue D, 2 a strictement intérêt à jouer d' ! Cet équilibre de Nash repose ainsi sur une **menace non crédible** (la menace de choisir une action non rationnelle en dehors de la "trajectoire" d'équilibre).

Comment faire pour éviter ce genre de résultat ? L'idée est simple, il faut demander que la stratégie soit **séquentiellement rationnelle** : elle doit prévoir un comportement "optimal" en tout point de l'arbre, c'est-à-dire même en dehors de la trajectoire qui sera jouée à l'équilibre : ① peut raisonnablement anticiper que ② jouera d' (et pas g') s'il joue D, et anticiper qu'il jouera g s'il joue G. Il en résulte qu'il doit comparer l'issue Gg' à Dd' et donc choisir de jouer D (ce qui correspond au second équilibre de Nash).

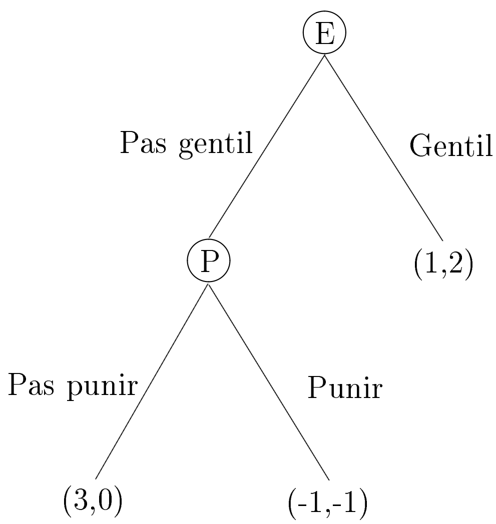


Le raisonnement précédent peut être généralisé à tout jeu fini en information parfaite. L'algorithme est le suivant : plaçons nous en fin de jeu, en un nœud prédécesseur d'un nœud terminal. Imaginons que le déroulement du jeu conduise à ce point. On peut anticiper que le joueur en question, jouera de manière optimale et choisira l'action (on suppose ici qu'il n'y a pas d'indifférence pour simplifier) qui maximise son gain. On peut donc effacer les autres actions issues de ce nœud. Le comportement devient d'une certaine manière totalement prévisible et on peut remplacer le nœud en question par le nœud terminal (avec les paiements correspondant) associé à l'action optimale. On recommence la procédure d'analyse pour les autres nœuds qui précèdent immédiatement les nœuds terminaux. A chaque étape de l'algorithme, l'arbre est (strictement) réduit. Si l'on répète l'opération on débouche nécessairement sur le nœud initial. Le jeu est réduit à un problème de décision simple du premier joueur !

Définition 4.1 *Le résultat de l'algorithme de Kühn est appelé **équilibre parfait**.*

Remarquons qu'il existe toujours au moins un équilibre parfait pour ce type de jeu : l'algorithme de Kühn converge toujours. Remarquons aussi qu'algorithme de Kühn et l'élimination successive des stratégies dominées sont deux procédures très similaires. On peut montrer facilement qu'un équilibre par élimination successive des stratégies dominées est un équilibre parfait. En revanche la réciproque n'est pas toujours vraie, il suffit pour s'en convaincre de remplacer le paiement 3 par le paiement 2 dans le jeu précédent : il existe alors deux équilibres parfaits (Dd', mais aussi Gg), alors que l'issue Gg ne peut être obtenue par élimination des stratégies dominées. En revanche les deux concepts coïncident dès lors qu'il n'y a pas d'indifférence (et donc pas d'ambiguïté dans l'algorithme de Kühn).

Autre exemple : Le jeu de l'éducation

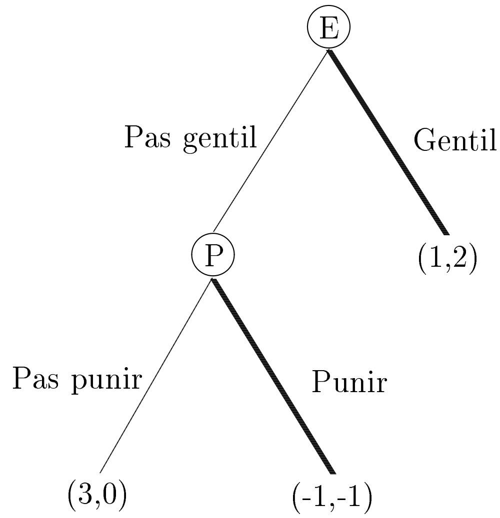


On suppose que le parent (P) souffre de punir son enfant (E).
Convertissons le jeu en jeu sous forme stratégique

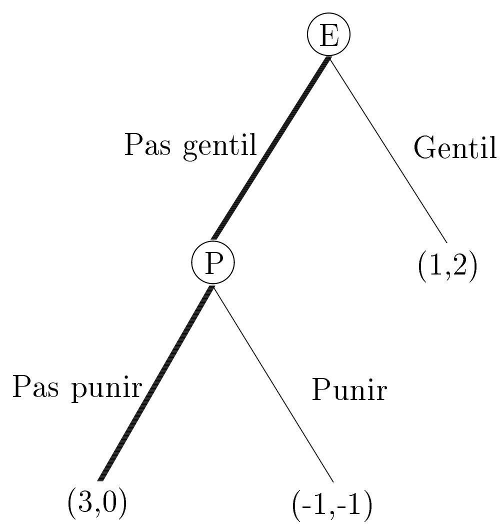
		Joueur 2 (Parent)	
		∅ Punir	∅ Ne pas punir
Joueur 1 (Enfant)	Gentil	(1,2)	(1,2)
	Pas gentil	(-1,-1)	(3,0)

On a alors deux équilibres de Nash : (Gentil, Punir) et (Pas gentil, Pas punir).

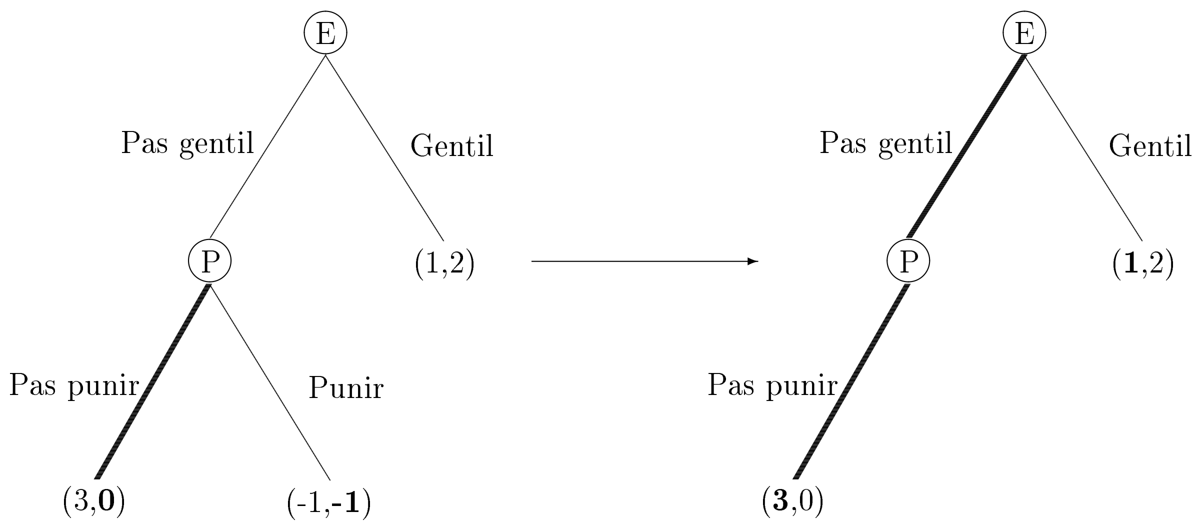
Dans le premier, l'enfant va bien se comporter parce qu'il a peur de la menace de ses parents (cas d'un enfant naïf).



Au contraire, le second est le cas d'un enfant "intelligent" qui sait que ses parents l'aiment tellement qu'ils n'aiment pas le punir !



Autrement dit le premier équilibre de Nash n'est pas crédible. Ce concept apparaît ainsi trop "faible". En appliquant l'algorithme de Kühn c'est-à-dire l'induction à rebours, on trouve bien que l'unique équilibre parfait est le second équilibre de Nash (pas gentil, pas punir). Attention : on suppose ici que le jeu n'est joué qu'une seul fois.



***Lecture** : Le paiement des parents est plus grand si ils ne punissent pas (-1<0). Anticipant cela, l'enfant compare 1 et 3 et choisit de ne pas être gentil.*

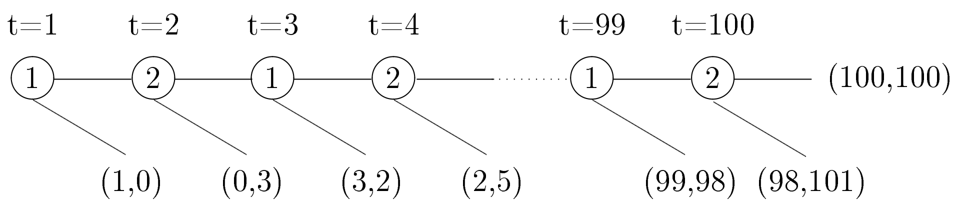
Théorème Tout jeu sous forme extensive fini et **à information parfaite** admet un équilibre parfait en stratégies pures.

On peut par ailleurs démonter le théorème suivant qui s'applique notamment aux jeux de table comme les échecs ou les dames :

Théorème (Zermolo et Von Neumann)
Dans tout jeu à deux joueurs à information parfaite, déterministe à somme nulle aux gains (Victoire, Défaite, Nul), l'un des joueurs possède une stratégie dans laquelle il assure au moins le nul.

L'algorithme de Kühn peut parfois mener à des situations qui peuvent sembler paradoxales, comme par exemple dans le **jeu du mille-pattes**.

Le jeu du mille-pattes est un jeu en 100 étapes. Aux étapes impaires, $t = 1, 3, ..., 99$ le joueur ① a le choix entre arrêter le jeu ou continuer. S'il arrête à l'étape t, le vecteur de paiement est (t, t - 1) sinon le jeu continue à l'étape t + 1. Aux étapes paires, $t = 2, 4, ..., 100$ le joueur ② a le choix entre arrêter ou continuer. Si ② arrête le vecteur de paiement est (t - 2, t+1) sinon le jeu continue. Si aucun joueur ne prend la décision d'arrêter le jeu, le vecteur de paiement est (100, 100).
Ainsi, si v_t dénote le vecteur de paiement si le jeu s'arrête à l'étape t, on a : $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 3)$, ..., $v_{49} = (49, 48)$, $v_{50} = (48, 51)$, ..., $v_{98} = (96, 99)$, $v_{99} = (99, 98)$, $v_{100} = (98, 101)$.



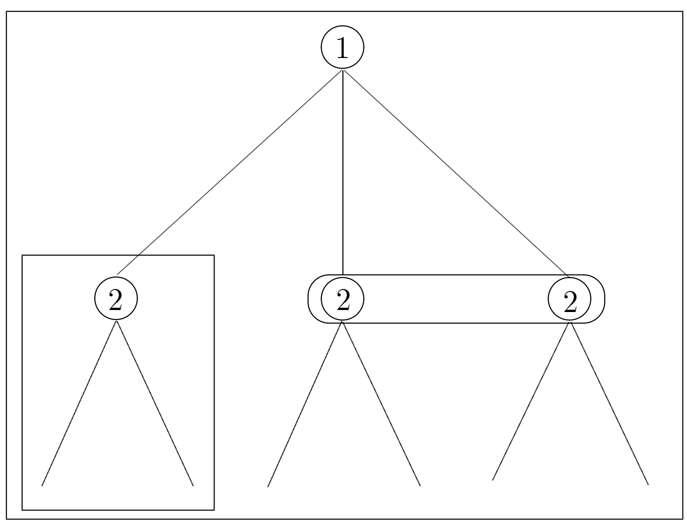
Les deux joueurs ont donc un intérêt mutuel à ce que le jeu dure le plus longtemps possible. Examinons l'équilibre sous jeux parfait. A l'étape 100, le joueur ② a le choix entre arrêter et gagner 101 ou continuer et gagner 100. Rationnellement, il devrait arrêter. Connaissant cela, à l'étape 99, le joueur ① devrait rationnellement arrêter le jeu. En continuant ce raisonnement, on voit que l'unique équilibre parfait est d'arrêter le jeu à chaque étape. En effet, aux étapes t impaires, le joueur ① a le choix entre arrêter et gagner t ou continuer et gagner $t + 1 - 2$ et aux étapes t paires, le joueur ② a le choix entre arrêter et gagner $t + 1$ et continuer et gagner $t + 1 - 1$. Est-ce raisonnable comme prédiction ? Les résultats expérimentaux montrent que les joueurs continuent le jeu jusqu'à atteindre un niveau de paiement suffisamment élevé avant d'arrêter... Est-ce que cela signifie que les joueurs sont irrationnels ? Si la rationalité pour un joueur est d'essayer d'augmenter son paiement alors manifestement on ne peut pas conclure que ce comportement est irrationnel puisqu'il permet aux joueurs d'obtenir plus que le paiement de l'équilibre parfait. Plus précisément, on peut remarquer que cet équilibre n'est pas efficace au sens de Pareto : il existe une situation, un vecteur de paiement (même plusieurs) unanimement préféré. Un comportement non-coopératif peut donc aboutir à des situations non efficaces. On remarque par contre que si ② s'engage à ne pas abandonner à la dernière étape, l'équilibre parfait est de toujours continuer et est alors efficace au sens de Pareto. Reste qu'il est difficile de crédibiliser un tel engagement.

4.2 Équilibre parfait en sous-jeux

Le concept précédent peut être généralisé dans le cas de jeux sous forme extensive en information imparfaite. L'idée est simple : l'algorithme de Kühn est fondée sur l'idée de cohérence interne : chaque joueur anticipe, pour toute suite possible, que les autres joueraient de manière optimale s'ils étaient conduits à cette séquence du jeu. Peut-on transposer cette idée à des jeux où il existe des ensembles d'information non réduits à des singletons ?

Définition 4.2 *On appelle* ***sous-jeu*** *d'un jeu donné, le jeu défini par un sous-arbre commençant en un ensemble d'information réduit à un singleton.*

Par exemple, le jeu suivant est composé de deux sous-jeux (encadrés)

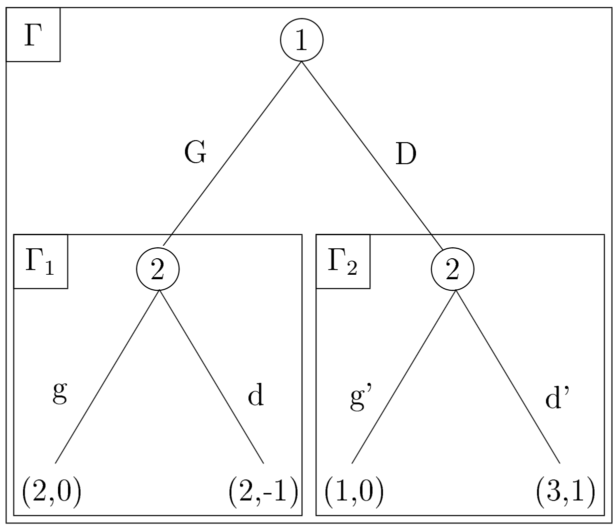


Définition 4.3 *Un* ***équilibre parfait en sous-jeux*** *(ou Nash parfait) d'un jeu (sous forme extensive) est constitué de stratégies qui sont équilibres de Nash dans tous les sous-jeux.*

Remarques

- Lorsqu'un sous-jeu est réduit à un jeu à 1 joueur, le concept d'équilibre de Nash est dégénéré, la stratégie doit simplement prévoir un comportement optimal.
- Le concept d'équilibre parfait en sous-jeux coïncide avec celui d'équilibre parfait lorsque le jeu est en information parfaite.

Si on revient à l'exemple récurrent 2.3

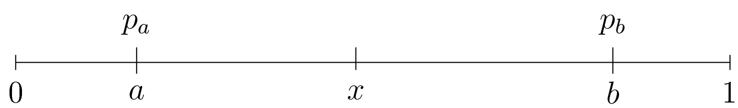


gg' est un équilibre de Nash de Γ et Γ_1 mais pas de Γ_2 donc gg' n'est pas un équilibre Nash Parfait. Un équilibre Nash parfait est un équilibre qui – même hors de la trajectoire d'équilibre – est un équilibre de Nash (par exemple ici Γ_2 n'est pas exploré à l'équilibre).

Applications : jeux en deux étapes (information presque parfaite) : Un jeu à deux joueurs, en deux étapes (ou périodes) se déroule de la manière suivante. Dans une première période chacun des deux joueurs choisit une stratégie K_i (dit de long terme, par ex. capacités de production). Au début de la seconde étape chacun observe les choix opérés en première et doit choisir une action de deuxième étape x_i (stratégie de court terme, par ex. les prix de production). Les paiements finaux sont $u_i(K_1, K_2, x_1, x_2)$.
Pour chaque couple (K_1, K_2), on cherche les équilibres de Nash en x_1, x_2. Notons un équilibre de Nash de ce sous-jeu $x_1^*(K_1, K_2)$, $x_2^*(K_1, K_2)$. Un équilibre de Nash parfait doit être tel que les stratégies de première période

constituent un équilibre de Nash du jeu ayant les paiements $\widehat{u}_i(K_1, K_2) = u_i(K_1, K_2, x_1^*(K_1, K_2), x_2^*(K_1, K_2))$.

Exemple : Deux marchands de glace souhaitent s'installer sur la plage. La stratégie de long terme est de choisir un emplacement sur cette plage (on notera les stratégies respectives a et b) alors que la stratégie de court terme consiste à fixer les prix : p_a et p_b.



Les estivants sont distribués uniformément sur le segment $[0, 1]$. Un estivant placé à un emplacement x doit choisir entre les marchands de glace, en prenant en compte le prix de la glace mais aussi les coûts de transport (supposés quadratiques). Il compare donc $p_a + (x-a)^2$ et $p_b + (x-b)^2$. On obtient alors une segmentation du marché.
L'estivant placé en x achète donc en a si :

$$
\begin{aligned}
& p_a + (x-a)^2 \leq p_b + (x-b)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & (x-a)^2 - (x-b)^2 \leq p_b - p_a \\
\Leftrightarrow \quad & (b-a)(2x - (a+b)) \leq p_b - p_a \\
\Leftrightarrow \quad & x \leq \frac{a+b}{2} + \frac{p_b - p_a}{2(b-a)}
\end{aligned}
$$

Quel est le profit, *i.e.* le paiement du jeu, dans la configuration a, b, p_a, p_b (on suppose les coûts marginaux nuls) ?

$$
\begin{aligned}
\Pi_a(a, b, p_a, p_b) &= p_a \left(\frac{a+b}{2} + \frac{p_b - p_a}{2(b-a)} \right) \\
\Pi_b(a, b, p_a, p_b) &= p_b \left(1 - \frac{a+b}{2} - \frac{p_b - p_a}{2(b-a)} \right)
\end{aligned}
$$

À a et b – décisions de long terme – fixées, les paiements du jeu dépendent des prix p_a et p_b, c'est-à-dire qu'on revient à un jeu simple à 2 joueurs et 2 possibilités. On maximise donc Π_a par rapport à p_a :

$$\begin{aligned} \Pi_a &= \frac{1}{2(b-a)} p_a (b^2 - a^2 + p_b - p_a) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial \Pi_a}{\partial p_a} &= \frac{1}{2(b-a)} (b^2 - a^2 + p_b - 2p_a) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad p_a^* &= \frac{b^2 - a^2 + p_b}{2} \end{aligned}$$

De même : $p_b^* = \frac{(1-a)^2 - (1-b)^2 + p_a}{2}$

On résolvant le système, on obtient :

$$\begin{cases} p_a^* = \frac{(b-a)(a+b+2)}{3} \\ p_b^* = \frac{(b-a)(4-a-b)}{3} \end{cases}$$

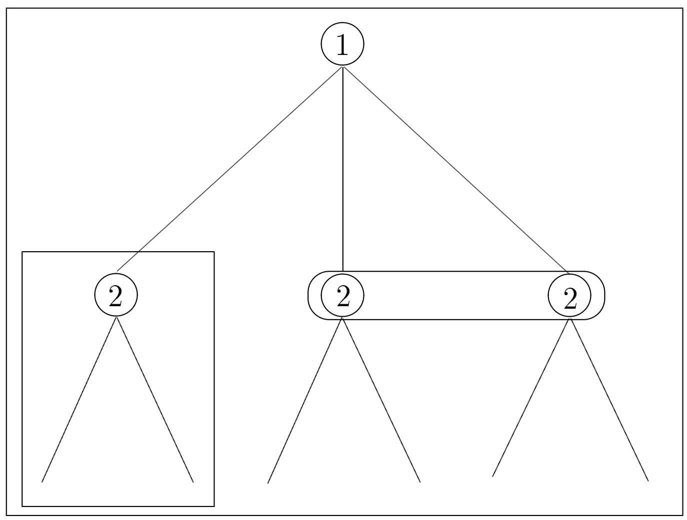
On remplace p_a et p_b par leur valeur d'équilibre dans les formules du profit :

$$\begin{aligned} \Pi_a(a, b, p_a^*, p_b^*) &= \frac{1}{18}(b-a)(a+b+2)^2 \\ \Pi_b(a, b, p_a^*, p_b^*) &= \frac{1}{18}(b-a)(4-a-b)^2 \end{aligned}$$

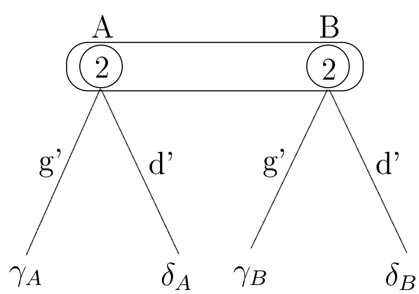
On cherche maintenant l'équilibre de Nash, qui sera nécessairement un équilibre Nash-parfait car il sera vrai pour tous les prix d'équilibre : étant donné b on maximise Π_a et étant donné a on maximise Π_b. On obtient alors : $a^* = -1/4$, $b^* = 5/4$ et $p_a^* = p_b^* = 3/2$. On peut remarquer que les prix et les profits d'équilibre (3/4) sont alors plus élevés que dans la situation où les deux marchands se mettent aux deux extrémités de la plage, $a = 0$, $b = 1$ qui donne $p_a = p_b = 1$ et $\Pi_a = \Pi_b = 1/2$.

4.3 Équilibre Bayesian Parfait

Comme on l'a vu précédemment, un sous-jeu commence en un ensemble d'information réduit à un singleton. On ne peut donc pas (en général) mettre en place l'algorithme de Kühn lorsque le jeu comporte un ensemble d'information non réduit à un singleton (comme dans l'exemple suivant), c'est-à-dire en information imparfaite.

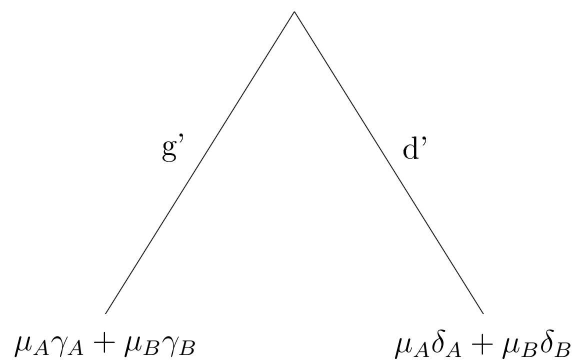


Cependant, si on se place en l'ensemble d'information (on ne mentionne que les paiements du joueur concerné) :



on remarque que le problème est trivial lorsque $\delta_A > \gamma_A$ et $\delta_B > \gamma_B$ (auquel cas le joueur choisira d') ou lorsque $\delta_A < \gamma_A$ et $\delta_B < \gamma_B$ (auquel cas le joueur choisira g'). Cependant, on ne peut rien dire si $\delta_A > \gamma_A$ et $\delta_B < \gamma_B$ par exemple, **à moins de** faire une hypothèse sur les probabilités respectives des nœuds A et B. En effet, si le joueur ② croit qu'il y a une très forte probabilité qu'on se trouve en A, il choisira de jouer d (dans le cas $\delta_A > \gamma_A$) et on pourra "généraliser" l'algorithme de Kühn.

On appelera ces hypothèses sur les probabilités des **croyances** et, à croyances μ_A et $\mu_B (= 1 - \mu_A)$ données, on remplacera le morceau d'arbre précédent par :



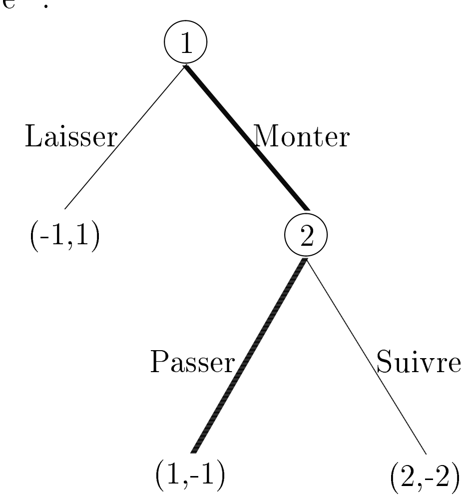
Autrement dit, on suppose que les joueurs sont neutres au risque et basent leurs choix sur leur espérance de gain calculée à partir de leurs croyances.

En opérant ainsi à tous les ensembles d'information, on peut mettre en œuvre l'algorithme de Kühn et déboucher sur un équilibre. Évidemment, l'équilibre trouvé dépend des croyances : à croyances données on obtient les stratégies que doivent suivre les joueurs. Si ces stratégies sont cohérentes avec les croyances (c'est-à-dire avec les probabilités que leur assignent les joueurs), on parlera d'**équilibre Bayesien parfait**

Par exemple, si supposer que $\mu_A = 1$ conduit à des stratégies telles que le nœud B est atteint de manière certaine, on est dans situation incohérente, et donc pas à un **équilibre Bayesien parfait**.

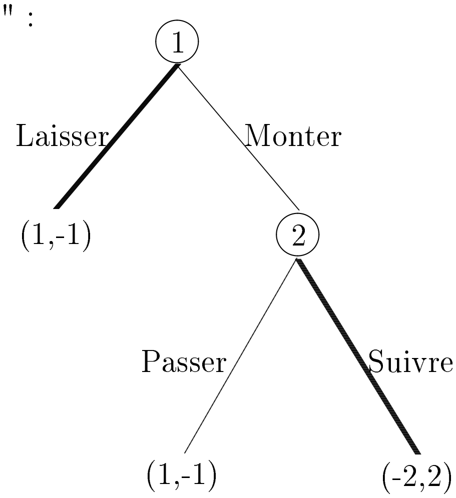
Exemple 4.1 *On reprend l'exemple 2.5. Deux joueurs commencent par mettre un euro dans le pot. On donne au joueur ① une carte qui peut être "Haute" avec probabilité q ou "Basse" avec probabilité $(1-q)$. Il peut "laisser" ou "monter". Si il "laisse", le joueur ② prend le pot et le jeu s'arrête. Si le joueur ① "monte", il rajoute 1€ dans le pot et le joueur ② a le choix entre "passer" et "suivre". Si il "passe", le joueur ① prend le pot. Si le joueur ② "suit", il ajoute 1€ dans le pot et le joueur ① montre la carte. Si elle est "Haute", le joueur ① prend le pot, sinon le joueur ② le prend.*

– Considérons d'abord le jeu en information parfaite : avant de jouer, ① montre sa carte à ②. On a alors deux jeux distincts :
  1. si la carte est "Haute" :



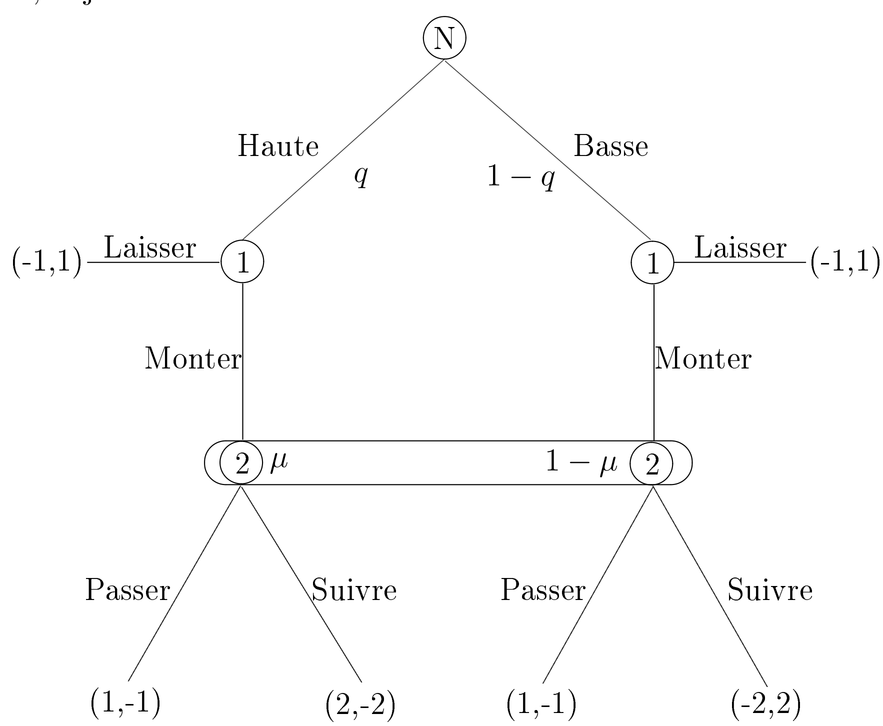
     où l'équilibre parfait est (Monter,Passer)

2. si la carte est "Basse" :



   où l'équilibre parfait est (Laisser,Suivre)

– Maintenant, si ① ne montre pas sa carte à ②, c'est-à-dire en information incomplète, le jeu s'écrit :



Afin de déterminer le(s) équilibre(s) Bayesien parfait, plaçons nous en l'ensemble d'information, après que le joueur ① ait monté. Le joueur ② forme alors des croyances sur le type de la carte. Notons μ sa croyance sur la probabilité que la carte soit haute sachant que ① a monté : $\mathbb{P}(\text{Haute} \mid \text{Monter})$, et $1-\mu$ sa croyance sur $\mathbb{P}(\text{Basse} \mid \text{Monter})$. Étant données ces croyances, ② va comparer ses espérances de gain et choisir de suivre si :

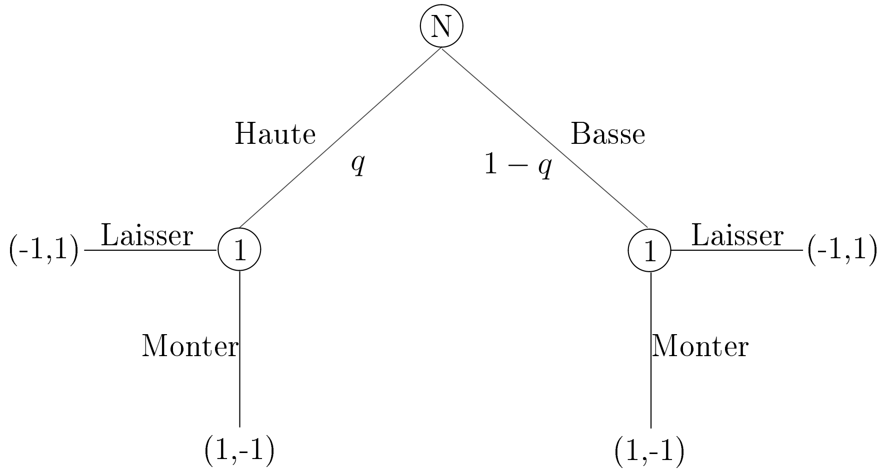
$$
\begin{aligned}
& \mathbb{E}_\mu(u_2(\{\text{Monter,Suivre}\})) > \mathbb{E}_\mu(u_2(\{\text{Monter,Passer}\})) \\
\Leftrightarrow\ & \mu.u_2(\{\text{Haute,Monter,Suivre}\}) + (1-\mu)u_2(\{\text{Basse,Monter,Suivre}\}) \\
& \qquad > \mu.u_2(\{\text{Basse,Monter,Passer}\}) + (1-\mu)u_2(\{\text{Basse,Monter,Passer}\}) \\
\Leftrightarrow\ & -2\mu + 2(1-\mu) > -1\mu - 1(1-\mu) \\
\Leftrightarrow\ & \mu < \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

On peut donc résumer le comportement de ② en fonction de ses croyances :

si $\mu > 3/4$, ② passe
si $\mu < 3/4$, ② suit
si $\mu = 3/4$, ② est indifférent et **tire au sort**

Vérifions que ces croyances soient bien compatibles avec les stratégies d'équilibre qui en découlent.

– si $\mu > 3/4$, on a vu que ② passait dès que ① montait.



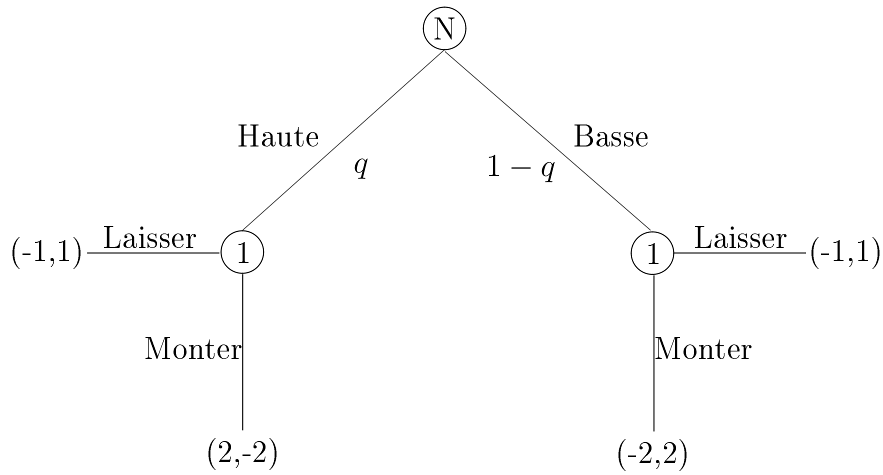
Que la carte soit Haute ou Basse, ① préfère alors "Monter" (et obtenir 1) à "Laisser" (et obtenir -1).

Cette stratégie est-elle compatible avec les croyances de ② sur $\mathbb{P}(Haute \mid Monter)$?
① montant toujours, on a $\mathbb{P}(\text{Haute} \mid \text{Monter}) = \mathbb{P}(\text{Haute}) = q$. Cet équilibre est donc compatible avec les croyance si $\mu = q$. Il ne peut ainsi exister que si $\boxed{q > 3/4}$ (on est ici dans le cas où $\mu > 3/4$). On a alors un équilibre Bayesien parfait où :

- ① monte quelque soit la carte dont il dispose (il bluffe donc systématiquement avec une carte basse)
- ② passe systématiquement

On parle alors d'un équilibre "rassemblant" ou de "pooling" dans la mesure où la stratégie de ① n'informe pas ② sur le type de la carte. Cet équilibre n'existe toutefois que quand il existe une grande proportion de cartes "Hautes" ($q > 3/4$).

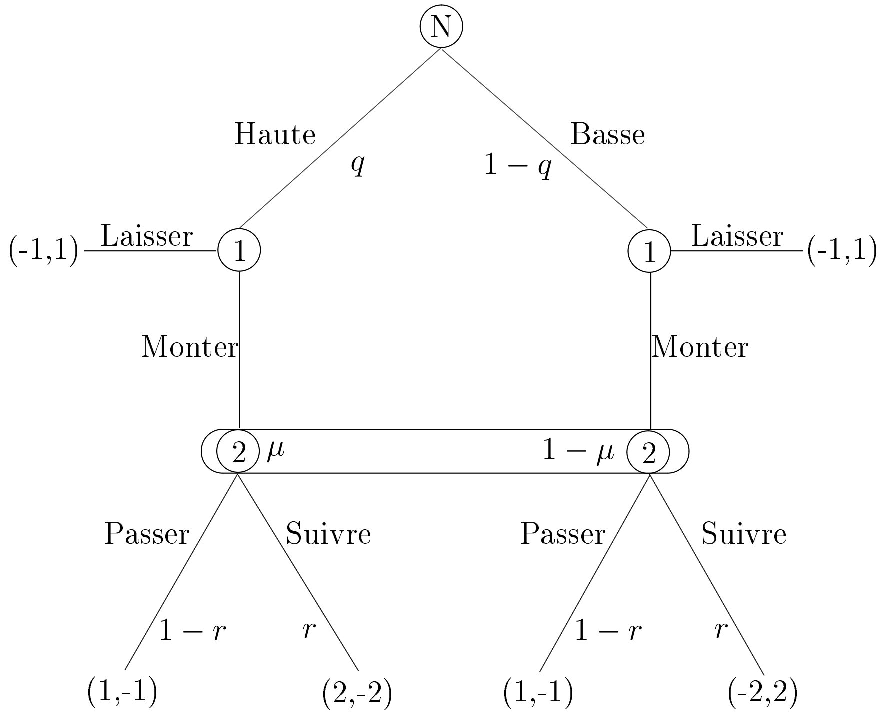
– si $\mu < 3/4$, on a vu que ② suivait dès que ① montait.



Dans cette configuration ① monte donc avec une carte Haute (2>-1) et laisse avec une carte Basse (-1>-2). On a donc $\mathbb{P}(\text{Haute} \mid \text{Monter}) = 1$ ce qui n'est pas compatible avec $\mu < 3/4$.

Lorsque $q < 3/4$ la possibilité pour avoir un équilibre Bayesien parfait est donc $\mu = 3/4$.

– si $\mu = 3/4$, on a vu que ② tirait au sort sa stratégie, c'est-à-dire qu'il employait une stratégie mixte. Notons r la probabilité que ② suive.



Lorsque la carte est "Basse", ① a donc intérêt à monter si et seulement si $-2r + (1-r) > -1$, c'est-à-dire si et seulement si $r < 2/3$; et il a toujours intérêt à monter lorsque la carte est "Haute". On a donc $\mathbb{P}(\text{Haute} \mid \text{Monter}) = q$ si $r < 2/3$ et $\mathbb{P}(\text{Haute} \mid \text{Monter}) = 1$ si $r > 2/3$. Aucune de ces deux solutions n'est cependant compatible avec les hypothèses $q < 3/4$ et $\mu = 3/4$.

La seule solution pour avoir un équilibre Bayesien parfait lorsque $q < 3/4$ est donc $\mu = 3/4$ et $r = 2/3$. Dans ce cas, avec une carte "Basse", ① est indifférent entre laisser et monter et adopte un stratégie mixte. Appelons t la probabilité que ① monte avec une carte "Basse" ; c'est-à-dire la fréquence de bluff. Cherchons donc quelle fréquence de bluff donne un équilibre Bayesien parfait, c'est-à-dire quelle valeur de t est compatible avec $\mu = 3/4$. Le théorème de Bayes donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{Haute} \mid \text{Monter}) &= \frac{\mathbb{P}(\text{Haute} \cap \text{Monter})}{\mathbb{P}(\text{Monter})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{Haute})\mathbb{P}(\text{Monter} \mid \text{Haute})}{\mathbb{P}(\text{Basse})\mathbb{P}(\text{Monter} \mid \text{Basse}) + \mathbb{P}(\text{Haute})\mathbb{P}(\text{Monter} \mid \text{Haute})} \\
&= \frac{q.1}{(1-q)t + q.1}
\end{aligned}$$

Ceci est donc compatible avec les croyances si et seulement si :

$$\frac{q}{(1-q)t+q} = 3/4$$

c'est-à-dire si et seulement si :

$$t = \frac{q}{3(1-q)}.$$

Il existe donc un équilibre Bayesien parfait lorsque $\boxed{q < 3/4}$ (c'est-à-dire lorsque la proportion de carte "Haute" est relativement faible) où :

- ① monte toujours quand la carte est Haute
- ① monte avec probabilité $t = \dfrac{q}{3(1-q)}$ quand la carte est Basse
- ② suit avec une probabilité $r = 2/3$

On peut donc représenter la fréquence de bluff à l'équilibre Bayesien parfait en fonction de la proportion de carte "Haute" comme suit :