Exercices et applications

1 Production

1.1 Productivité marginale, coût

On considère le modèle de production suivant dans lequel un output Y est produit à l'aide de deux inputs le capital K et le travail L selon la fonction de production :

$$Y = f(K, L) \equiv K^\alpha L^{(1-\alpha)}$$

avec $0 < \alpha < 1$

- Calcul des productivités marginales, relations avec les productivités moyennes :

$$\frac{\partial f}{\partial K} = \alpha \left(\frac{L}{K}\right)^{1-\alpha} = \alpha \frac{Y}{K}$$

$$\frac{\partial f}{\partial L} = (1-\alpha) \left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = (1-\alpha) \frac{Y}{L}$$

- La fonction de production est homogène de degré 1, les rendements d'échelle sont constants et l'on a (Euler) :

$$\forall L, K,\ f(K, L) = K \frac{\partial f}{\partial K} + L \frac{\partial f}{\partial L}$$

- On suppose qu'après production, le capital est encore utilisable, pour une quantité égale à $(1-\delta)K$ où δ représente l'usure physique dy capital. Les vecteurs de production réalisables sont donc :

$$\begin{pmatrix} -L \\ -\delta K \\ f(K, L) \end{pmatrix}$$

- Soit w le prix du travail, r le prix du capital, et p le prix du bien produit. Calculer la demande d'input, la fonction de coût et la fonction d'offre.

$$C(Y) = \min wL + r\delta K,\ f(K, L) = Y$$

On obtient comme condition nécessaire

$$\frac{w}{r\delta} = \frac{\frac{\partial f}{\partial L}}{\frac{\partial f}{\partial K}} = \frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{K}{L}$$

La proportion capital/heure dépend du prix relatif du capital et du travail : plus le travail est cher plus on utilise du capital

L'offre d'emploi (demande de travail) est :

$$L = \frac{Y}{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w}{r\delta}\right)^\alpha}$$

La demande de capital :

$$K = \frac{Y}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r\delta}{w}\right)^{1-\alpha}}$$

Pour Y donné chacune des fonction de demande est décroissante par rapport à son prix et croissante par rapport au prix de l'input substitut.

$$C(Y) = \left(\frac{w}{\left(\frac{\alpha}{1-\alpha} \frac{w}{r\delta}\right)^\alpha} + \frac{r\delta}{\left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \frac{r\delta}{w}\right)^{1-\alpha}} \right) Y = c(w, r) Y$$

On a une fonction de coût linéaire. On voit alors que la fonction d'offre est :

$$\begin{aligned} \text{si } p > c(w, r) &\text{ l'offre est infinie} \\ \text{si } p < c(w, r) &\text{ l'offre est nulle} \\ p = c(w, r) &\text{ l'offre est quelconque} \end{aligned}$$

La fonction d'offre est "horizontale" (infiniment élastique)

A l'équilibre on a nécessairement $p = c(w, r)$.

2 Consommateur

2.1 Equilibre dans une économie d'échange

On considère une économie à la Robinson Crusoë à deux individus A et B et deux biens dont les quantités sont notés x et y .

La fonction d'utilité de A est $u_A(x, y) = x^2 y$, celle de B est $u_B(x, y) = xy^2$.

- Les fonctions d'utilité sont de type Cobb-Douglas
- Supposons qu'il y a une quantité totale de bien "x" égale à 2 et une quantité totale de bien "y" égale à 1. Comment distribuer entre les deux individus de manière "efficace"? On cherche une répartition x_A, x_B y_A, y_B telle que l'on ne peut pas augmenter l'utilité de l'un sans diminuer celle de l'autre.

Soit une distribution donnée. Pour augmenter l'utilité de A il faut proposer une modification dx_A, dy_A telle que :

$$\frac{\partial u_A}{\partial x_A} dx_A + \frac{\partial u_A}{\partial y_A} dy_A \geq 0$$

Cette modification entraine pour B une modification $dx_B = -dx_A$ et $dy_B = -dy_A$, ce qui entraine une modification d'utilité égale à :

$$du_B = -\frac{\partial u_B}{\partial x_B} dx_A - \frac{\partial u_B}{\partial y_B} dy_A$$

La distribution n'est pas efficace s'il existe dx_A, dy_A tel que :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_A}{\partial x_A} dx_A + \frac{\partial u_A}{\partial y_A} dy_A &\geq 0 \\ -\frac{\partial u_B}{\partial x_B} dx_A - \frac{\partial u_B}{\partial y_B} dy_A &\geq 0 \end{aligned}$$

avec au moins une inégalité stricte

c'est-à-dire :

$$-\frac{\frac{\partial u_B}{\partial y_B}}{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}} dy_A \leq dx_A \leq -\frac{\frac{\partial u_A}{\partial y_A}}{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}} dy_A$$

Avec au moins une inégalité stricte.

Ce qui n'est possible que si

$$\frac{\frac{\partial u_B}{\partial y_B}}{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}} \neq \frac{\frac{\partial u_A}{\partial y_A}}{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}$$

Réciproquement si $\frac{\frac{\partial u_B}{\partial y_B}}{\frac{\partial u_B}{\partial x_B}} = \frac{\frac{\partial u_A}{\partial y_A}}{\frac{\partial u_A}{\partial x_A}}$ alors on ne peut pas trouver de redistribution qui augmente l'utilité de l'un sans diminuer celle de l'autre.

Ici cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{x_A}{y_A} &= 4\frac{x_B}{y_B} \\ x_A + x_B &= 2 \\ y_A + y_B &= 1 \end{aligned}$$

Ce qui définit une courbe dans l'espace (x_A, y_A) c'est-à dire une relation entre x_A et y_A.

- Supposons que la ressource totale soit distribuée initialement entre A et B de la façon suivante :

  pour A : 1/2,1

  pour B : 1/2,1

  Un commissaire priseur annonce les prix : (p_1, p_2) quelles sont les demandes ?

$$\begin{aligned} &\max u_A(x, y), \text{ avec } p_1 x + p_2 y = p_1(1/2) + p_2 \\ &\max u_B(x, y), \text{ avec } p_1 x + p_2 y = p_1(1/2) + p_2 \end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{2}{3}\frac{p_1(1/2) + p_2}{p_1} \\ y_A &= \frac{1}{3}\frac{p_1(1/2) + p_2}{p_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{3}\frac{p_1(1/2) + p_2}{p_1} \\ y_B &= \frac{2}{3}\frac{p_1(1/2) + p_2}{p_2} \end{aligned}$$

L'équilibre est obtenu si les quantités demandées sont compatibles avec les quantités disponibles :

$$x_A + x_B = 1 \Longleftrightarrow 1/2 + \frac{p_2}{p_1} = 1 \Longleftrightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{1}{2}$$

Ce qui donne la répartition :

$$\begin{aligned} x_A &= \frac{2}{3} \\ y_A &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{1}{3} \\ y_B &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

- Cette répartition est efficace (elle vérifie la relation de la question 1)

3 Economie Industrielle

3.1 Barrière à l'entrée

Une entreprise est en situation de monopole sur un marché. Une entreprise concurrente songe à entrer sur le marché. Le coût fixe d'entrée est égal à f .

Si l'entreprise 1 et l'entreprise 2 fournissent repectivement q_1 et q_2 alors le prix qui s'établit est $p = 1-q = 1-q_1-q_2$.

Le coût marginal de production est c .

Le timing est le suivant : la firme 1 joeu en premier puis 2 décide ou non d'entrer, puis 2 décide son niveau de production (si elle a décidé d'entrer).

- Plaçons nous au début de l'étape 2 (1 a fini de jouer) 2 observe q_1.

  2 a le choix entre rester en dehors du marché : son profit est nul, ou entrer et son profit est

  $$\Pi_2(q_1) = \max_x px - f = (1-q_1-x-c)x - f$$

  On obtient :

  $$q_2 = \frac{1-c-q_1}{2}$$
  $$\Pi_2(q_1) = \frac{(1-c-q_1)^2}{4} - f$$

  La meilleure réponse est donc :

  $$MR_2(q_1) = 0 \text{ si } \frac{(1-c-q_1)^2}{4} \leq f$$
  $$MR_2(q_1) = \frac{1-c-q_1}{2} \text{ sinon}$$

- Anticipant cette meilleure réponse, la firme 1 choisit q_1 de manière à maximiser son profit.

  Si q_1 est tel que $\frac{(1-c-q_1)^2}{4} > f$ (q_1 petit) , alors $\Pi_1(q_1) = \Pi^d(q_1) = \frac{1-c-q_1}{2}q_1$ (l'indice d veut dire duopole)

  Si q_1 est *tel* que $\frac{(1-c-q_1)^2}{4} \leq f$ (q_1 grand) alors $\Pi_1(q_1) = \Pi^m(q_1) = (1-c-q_1)q_1$ (l'indice m veut dire monopole)

- Soit alors $\widehat{q}$ *tel* que $\frac{(1-c-q)^2}{4} = f$, c'est-a-dire $\widehat{q} = 1-c-2\sqrt{f}$

  Soit $q^* = \arg\max \Pi^d(q_1) = \frac{1-c}{2}$, Soit $\Pi^* = \max \Pi^d(q_1) = \frac{(1-c)^2}{8}$

  Trois cas sont possibles :

  f petit : le profit obtenu en jouant $\widehat{q}$ (qui dissuade l'entrée) est inférieur au profit obtenu en jouant q^*.

  f grand : le profit obtenu en jouant $\widehat{q}$ (qui dissuade l'entrée) est supéruer au profit obtenu en jouant q^*.

  Ainsi si le coût d'entrée est grand, le monopole a intérêt a inonder le marché au delà de q^* pour induire le joueur 2 à ne pas entrer.

4 Economie Publique

4.1 Financement d'un projet public

On considère le projet de construction d'un phare. Le coût de construction est égal à $c(y) = ay^2$ où a est un paramètre positif.

Il y a deux catégories d'usagers :

type 1 : consentement à payer : $u_1(y) = \sqrt{y}$: (en nombre N_1)

type 2 : consentement à payer : $u_2(y) = 2\sqrt{y}$: (en nombre N_2)

- Efficacité

  Equation de Bowen Lindhal Samuelson :

  $\frac{N_1}{2\sqrt{y}} + \frac{N_2}{\sqrt{y}} = 2ay \Longleftrightarrow y = \left(\frac{N_1}{4a} + \frac{N_2}{2a}\right)^{2/3}$

- Souscription : ondemande aux usagers de se cotiser (on suppose pour simplifier que $N_1 = N_2 = 1$) :

  Chaque usager obtient : $u_i(\frac{\sqrt{s_1+s_2}}{a}) - s_i$

  La meilleure réponse est donnée par :

  $$\text{si } \frac{1}{2a\sqrt{s_j}} u_i'\left(\frac{\sqrt{s_j}}{a}\right) < 1 \text{ alors } s_i = 0$$

  sinon :

  s_i est définit par $\frac{1}{2a\sqrt{s_i+s_j}} u_i'\left(\frac{\sqrt{s_i+s_j}}{a}\right) < 1$

  L'un des deux usagers est passager clandestin