Efficacité

Efficacité au sens de Pareto

La première question que l'on peut se poser dans une économie décrite par ses consommateurs et ses ensembles de production est celle que se poserait un "ingénieur" soucieux de ne pas gaspiller les ressources. Comment faut-il utiliser les ressources? Comment faut il les distribuer entre les différents agents.

Soit donc une économie à L biens, I **individus consommateurs**, J **ensembles de production.** Les individus sont munis d'une fonction d'utilité u_i. de $\mathbb{R}^L$ dans $\mathbb{R}$.

On note y_j les vecteurs de production : $y_j \in \mathbb{R}^L,\ y_j = (y_j^1, \dots y_j^L)$. y_j^p peut être négatif (bien consommé, input) ou positif (bien produit, output).On suppose que chaque ensemble de production Y_j peut être défini par son équation $y \in Y_j \Longleftrightarrow F_j(y) \leq 0$
On pose : $\Omega =$ quantité de biens disponibles initialement (dotations initiales)

Allocation réalisable :

Que faire de Ω ?

$$\Omega \begin{cases} \longrightarrow & distribuer \\ \longrightarrow & transformer \end{cases}$$

L'allocation $x \in \mathbb{R}^{LI}$ est réalisable si et seulement si :

$$\exists y_j \in Y_j \ / \ \sum_i x_i \leq \sum_j y_j + \Omega$$

où $\leq$ désigne ici une inégalité entre les composantes des vecteurs.
On note $\Re$ l'ensemble des allocations réalisables.

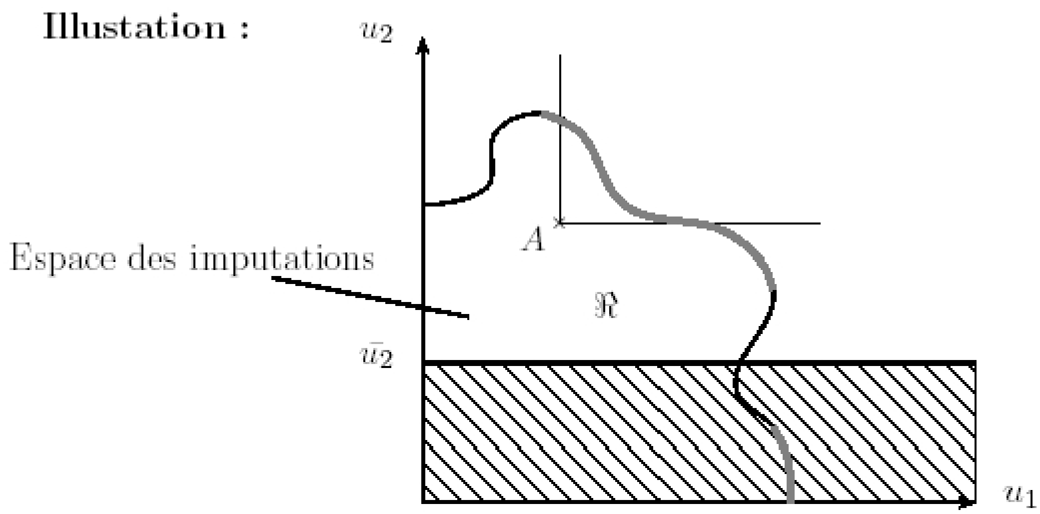
Parmi toutes les allocations réalisables, on peut définir les allocations dites "efficaces au sens de Pareto".

Allocation efficace au sens de Pareto (PE)

x est (PE) si et seulement si x est réalisable ($x \in \Re$) et $\nexists x' \in \Re \ / \ \{\forall i,\ u_i(x_i) \leq u_i(x'_i)\}$, avec au moins une inégalité stricte.

Ce critère est un critère d'unanimité : une allocation n'est pas efficace au sens de Pareto dès lors qu'unanimement la collectivité est d'accord pour en changer. Du fait de la faiblesse de ce critère, on s'attend évidemment à ce qu'il y ait énormément d'allocations efficaces au sens de Pareto. Par exemple, si les utilités sont strictement croissantes, donner tout à un individu est une allocation Pareto efficace!

Illustation :



A n'est pas (PE) compte tenu de la définition : tous les points situés au Nord-Est de A augmentent l'utilité de 1 et 2 avec au moins une augmentation stricte. En gris, on a tracé l'ensemble des allocations (PE). Pour les trouver, on cherche les points n'ont pas d'allocations réalisables à leur Nord-Est ou, on fixe u_2 et on cherche l'allocation qui maximise u_1 (on ignore la partie hachurée $\leftarrow$ contraintes).

On écrit :

$$\max_{x_1} \quad u_1(x_1)$$
$$s.c. \begin{cases} u_i(x_i) \geq v_i,\ i \in \{2,..I\} & (\alpha_i) \\ \sum_i x_i \leq \sum_j y_j + \Omega & (\lambda_l) \\ F_j(y_j) \leq 0 & (\beta_j) \end{cases}$$

On pose $\alpha_1 = 1$
CN1$^{\text{er}}$O : $\alpha_i \nabla u_i = \lambda = \beta_j \nabla F_j$

Les gradients ∇u_i sont tous parallèles entre eux, et parallèles à aux gradients ∇F_j.

petit rappel : $\max\limits_{\substack{g_1(x)\geq 0 \\ g_2(x)\geq 0}} f(x)$

Conditions de Kühn et Tücker : $\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 g_1 = 0,\ \lambda_2 g_2 = 0 \end{cases}$

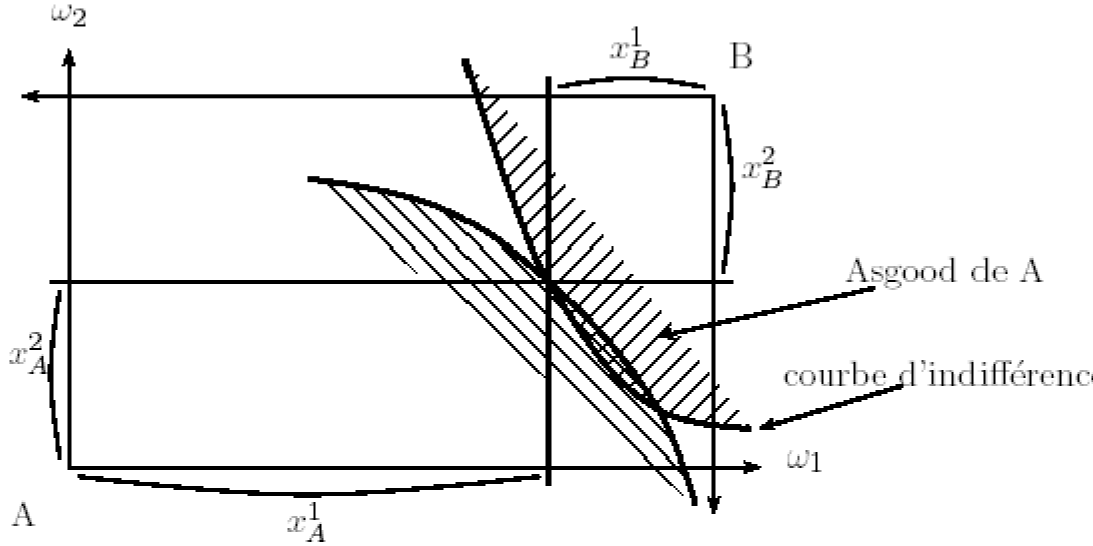
$TMS = \frac{\frac{\partial u_i}{\partial x_i^h}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i^l}} = \frac{\frac{\partial u_j}{\partial x_j^h}}{\frac{\partial u_j}{\partial x_j^l}}$. C'est la quantité de bien l que i est prêt à abandonner pour avoir une unité de bien h. (taux de troc de Mr i)

Les **taux de troc** doivent être les mêmes pour les deux individus. Si tel n'était pas le cas, un *deal* serait possible entre les deux.
On doit aussi avoir :

$$TMT = \frac{\frac{\partial F_j}{\partial y_j^k}}{\frac{\partial F_j}{\partial y_j^l}} = \frac{\frac{\partial F_m}{\partial y_m^k}}{\frac{\partial F_m}{\partial y_m^l}}$$

Illustration : boîte d'Edgeworth

$L=2$, $I=2$. On note A et B les individus.



Il n'y a pas de production dans cette économie, c'est une pure économie d'échanges. L'intérieur du rectangle représente l'ensemble des allocations réalisables. On cherche maintenant les allocations (PE). Dans le dessin ci-dessus l'allocation n'est pas *Pareto* efficace puisqu'il existe des allocations (à l'intersection des Asgoods) qui sont préférées par les deux.

Annexe mathématique

Si f est une fonction de plusieurs variables, on note $\nabla f(x)$ le vecteur dont les coordonnées sont les dérivées partielles de la fonction f par rapport à chacune des variables.

Par exemple pour deux variables $x = (x_1, x_2)$. prenons $f\ (x) = x_1^2 \times x_2$

On a

$$\nabla f(x) = \left| \begin{array}{c} 2x_1x_2 \\ x_1^2 \end{array} \right.$$

Au même titre que l'on a (pour les fonctions d'une variable)

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h) \text{ avec} \lim \varepsilon(h) = 0$$

On a aussi :

$$f(x+h) = f(x) + < \nabla f(x), h > + \|h\|\varepsilon(h) \text{ avec} \lim \varepsilon(h) = 0$$

Par exemple :

$(x_1 + h_1)^2 \times (x_2 + h_2) = x_1^2 \times x_2 + 2x_1x_2h_1 + x_1^2h_2 + h_1^2(x_2 + h_2) + 2h_1h_2x_1$

Soit le programme : $\max\limits_{\substack{g_1(x)\geq 0 \\ g_2(x)\geq 0}} f(x)$

Conditions de Kühn et Tücker : x est solution du programme d'optimisation si il existe λ_1 et λ_2 réels positifs tels que :

$$\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 g_1 = 0,\ \lambda_2 g_2 = 0 \end{cases}$$