Production

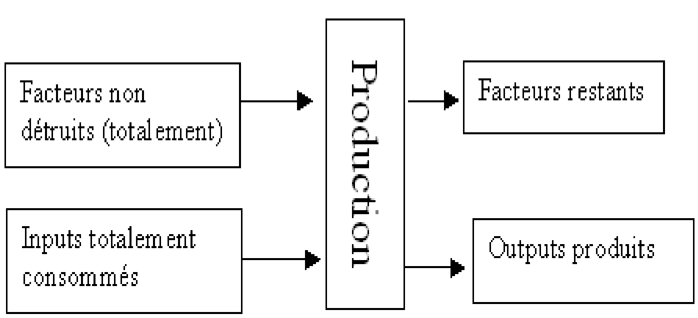
Dans ce chapitre nous allons nous concentrer sur la modélisation de la production. L'approche que nous allons utiliser est extrêmement rudimentaire : l'entreprise y est décrite comme "une boîte noire" dans laquelle on transforme des biens ou services existants en d'autres biens matériels ou services.

Les biens utilisés comme "inputs", c'est à dire ceux qui "entrent" pour être transformés, peuvent être eux mêmes issus d'une autre unité de production. On les appellera "biens intermédiaires". D'autres au contraires sont disponibles naturellement à l'état brut : on parlera alors de facteurs primaires. Le travail, en particulier est considéré comme un facteur primaire (même s'il faut nourrir le travailleur pour qu'il puisse travailler!); il en est de même de la terre pour l'agriculture. A l'inverse la tôle d'acier qui est utilisée par un constructeur automobile est un bien intermédiaire. D'une manière générale, l'ensemble des biens ou services qui sont utilisés et tranformés sont appelés facteurs de production ou inputs. Les produits ou services qui sortent du processus de production sont appelés "outputs" ou simplement produits.

1 Echelle de temps

On décrit la production sur une échelle de temps donnée. C'est ainsi que l'on doit distinguer le court terme (production par jour, par mois ou par an) du long terme (plusieurs années).

Sur le court terme, par exemple, certains inputs sont "intégralement" consommés dans le processus de production : la quantité en question est donc un flux de produits. D'autres inputs, c'est le cas en particulier des biens d'équipement, ou des outils de production, ne sont "détruits" que partiellement par le processus de production : ici c'est le stock qui est déterminant. Ainsi le bilan (sur le court terme) peut être représenté de la manière suivante :



D'une manière générale, les approvisionnements d'inputs ne portent pas le même nom selon qu'il s'agit de "consommables" ou "d'équipement". Ainsi on appelle "investissement" les achats de facteurs qui s'utilisent sur le long terme, et matières premières, consommables, ou simplement achats les autres types d'inputs.

En annexe du chapitre suivant on fera le lien entre l'analyse économique de la production et l'analyse "comptable" dans laquelle l'échelle de temps (trimestre ou année) est déterminante. Ici nous nous fixons une echelle de temps une fois pour toute.

1.1 Facteurs fixes et facteurs variables

Le niveau de certains facteurs est difficilement modifiable sur le court terme. Par exemple, la superficie d'une exploitation agricole, les batiments et les outils de production de l'industrie lourde, dans certains cas le niveau de main d'oeuvre dans certaines entreprises, sont fixés sur longue période et ne peuvent pas être modifiés à tout bout de champ. Ces facteurs sont appelés facteurs fixes car leur niveau est déterminé "une fois pour toutes". Les quantités des autres facteurs (en particulier les matières premières, par exemple), peuvent être fixées en "temps réel".

La limite entre facteurs fixes et facteurs variables dépend crucialement de l'échelle de temps que nous adoptons. Ainsi, dans le très long terme tous les facteurs sont variables.

Une démarche purement théorique nous conduirait à considérer un modèle général à échelle de temps "infini" dans lequel chaque bien ou service est indexé par la date de sa disponibilité et un processus de production est décrit simplement comme une opération de transformation "atemporelle" où inputs sont intégralement transformés en outputs.

De manière plus pratique, on peut adopter un modèle de "court" terme dans lequel les périodes s'enchaînent temporellement. Dans ce cas les facteurs fixes sont des "paramètres" et non des variables du modèle.

Il existe plusieurs façons de décrire les processus de production. Nous allons en évoquer 2 principales qui sont évidemment totalement équivalentes. Nous supposons ici qu'il y a L biens dans l'économie. Chaque bien est parfaitement défini par ses caractéristiques physiques, sa qualité, sa date de disponibilité...

2 Plan de production, et ensembles de production

Definition 1 *Un plan de production est un vecteur v de $\mathbb{R}^L$ dont les composantes négatives représentent les quantités d'inputs correspondants consommés dans le processus de production, et les composantes positives les quantités d'output produits.*

$$v = (v_1, v_2, ..., v_k, ..., v_L)$$

avec

$v_k \leq 0$: *la quantité* $|v_k|$ *de bien k est consommée*

$v_k \leq 0$: *la quantité* v_k *de bien k est produite*

Definition 2 *Une entreprise est modélisée comme un ensemble Y de plans de production qu'elle peut mettre en oeuvre*

Cette description est celle que l'on utilise lorsqu'on parle de "process" dans une entreprise. Le process est l'ensemble des plans de production qui décrivent les biens consommés, les équipements utilisés, le travail mis en oeuvre et les produits obtenus.

Les ensembles de production "vraisemblables" ne sont pas quelconques (évidemment) .Par exemple (on note $v \leq w$, lorsque pour tout k on a $v_k \leq w_k$) :

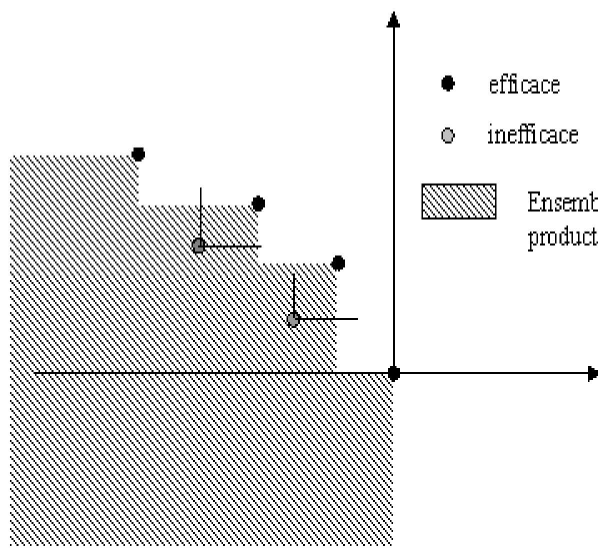
- $Y \cap \mathbb{R}^L_+ = \{0\}$ ou $\varnothing$ (s'il existe des facteurs fixes) : il n'existe pas de plan de production où il n'y ait que des "outputs" (on n'a rien sans rien)
- $\mathbb{R}^L_- \subset Y$: on peut toujours "détruire" sans produire.
- $v \in Y \Longrightarrow \forall w \leq v \ w \in Y$: qui peut le plus peut le moins.
- Y est fermé.

2.1 Efficacité, Frontière

Etant donnés les plans de production accessibes à une entreprise, on peut se poser la question d'efficacité productive.Intuitivement, un plan de production est efficace s'il n'en existe pas d'autres où l'on pourrait produire plus avec moins. Cette définition de l'efficacité est extrêmement naturelle : une entreprise qui n'ajuste pas ses plan de productions de manière efficace gaspille des ressources qui pourraient être utilisées ailleurs.

Definition 3 *Un plan de production v est efficace dans Y si et seulement si, il n'existe pas de vecteur $w \neq v$ dans Y tel que $v \leq w$. L'ensemble des plans efficaces s'appelle "frontière" de production.*

Definition 4 *Equation de la frontière : dans la majeure partie des cas, c'est à dire lorsque l'ensemble de production est suffisamment régulier, on peut représenter l'ensemble des productions efficaces par son "équation" dans $\mathbb{R}^L$. Cette équation est du type $F(v) = 0$, avec par exemple $F(v) \leq 0$ pour les vecteurs de production de l'ensemble Y.*



Ensemble de production

Dans une entreprise il peut être utile d'analyser la production selon la méthode décrite plus haut. Par exemple, on peut répertorier la production journalière en identifiant les ressources consommées et les produits obtenus jour après jour... On obtient ainsi un "nuage de points" dans un espace qui a autant de dimensions qu'il y a d'inputs variables et d'outputs. Parmis tous ces points certains sont efficaces, d'autres non. La recherche des causes de ces inefficacités peut permettre d'optimiser la production.

2.2 Convexité, rendements

Certaines propriétés possibles des ensembles de production méritent d'être mentionnées :

- **Definition 5** *Ensemble de production convexe : Y est convexe si : $v \in Y$, $w \in Y \Longrightarrow \forall \lambda \in [0, 1]$, $\lambda v + (1-\lambda) w \in Y$*

Dire qu'un ensemble de production est convexe signifie simplement que l'on peut "combiner" deux plans de production.

- **Definition 6** *Rendements d'échelle croissants : La production est à rendements d'échelle croissants si* $v \in Y \Longrightarrow \forall \lambda \geq 1 \ \lambda v \in Y$

Dire qu'un ensemble de production est à rendement d'échelle croissants signifie que l'on peut répliquer les plans de production sans perte.

Dans la suite nous examinons le cas particulier d'une entreprise qui produit un seul output. Dans ce cas il peut être utile d'exprimer l'équation de la frontière de production de manière légèrement différente.

3 Fonction de production

Lorque l'entreprise ne produit qu'un seul bien, il est commode de représenter son "process" par une fonction de production qui associe aux inputs consommés, et utilisés, la quantité maximale d'ouput obtenue. Cette fonction n'est rien d'autre qu'une forme particulière de l'équation de la frontière dans laquelle on exprime la quantité produite comme fonction des quantités consommées ou utilisées.

Si l'on note y la quantité d'output produit et x_i la quantité d'input i utilisées la fonction de production est alors la fonction de plusieurs variables qui au vecteur x fait correspondre le réel y.

Definition 7 *La fonction de production décrit la quantité produite comme fonctioncroissante des quantités d'inputs utilisées. On note*

$$y = f(x_1, x_2..., x_L) \equiv f(x)$$

Il est alors très simple de faire la distinction entre facteurs fixes et facteurs variables. Si un facteur est considéré coimme fixe, sa valeur est donnée (comme paramètre) dans la fonction de production. Par exemple si le niveau d'input numéro 2 est fixé à $\overline{x}_2$ la fonction de production s'écrit

$$y = \widetilde{f}(x_1, x_3..., x_L) \equiv f(x_1, \overline{x}_2..., x_L)$$

Souvent, au niveau agrégé, on ne distingue que deux inputs : le travail, que l'on note souvent L et le capital économique (c'est à dire les machines, les équipements, les bâtiments...) que l'on note K . Souvent K est fixe dans le court terme de sorte que la fonction de production fait apparaître un lien de court terme entre niveau d'emploi et niveau de production.

Il n'est pas toujours aisé de calculer exactement la fonction de production d'une entreprise. Deux méthodes sont possibles : la méthode par l'ingénierie consiste à analyser le processus de production de manière à le décomposer en unités élémentaires pour lesquelles la transformation d'input en ouput est facile à modéliser. Cette méthode permet de formaliser le process de manière théorique. La forme analytique obtenue est souvent "linéaire" en un sens où par hypothèse les transformations envisagées sont elles-mêmes linéaires. La deuxième méthode est empirique et consiste à ajuster une fonction paramétrée sur les données réelles de production. Il s'agit alors essentiellement de faire passer une fonction "simple" par plusieurs points expérimentaux.

3.1 Productivité moyenne et productivité marginale d'un facteur

La productivité est un concept assez intuitif. Il faut cependant prendre garde à distinguer productivité moyenne et productivité marginale.

Definition 8 *La productivité moyenne du facteur* x_i *est par définition le rapport*

$$\frac{f(x)}{x_i}$$

La productivité mariginale du facteur x_i *est par définition :*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv f'_i(x)$$

La productivité marginale a un sens très clair : de combien augmente la production lorsque l'on augmente la quantité d'un seul input en laissant les autres constants.

Empiriquement on constate que généralement, la productivité marginale des facteurs est d'abord croissante (pour des productions faibles) puis décroissante. Ainsi, la fonction de production "restreinte" à la variable x_i (*les* autres étant maintenues constantes) a la forme suivante :

Cette forme "sigmoïde" peut se résumer de la manière suivante : le rendement marginal d'un input diminue à partir d'un certain point (le niveaux des autres inputs étant fixé).

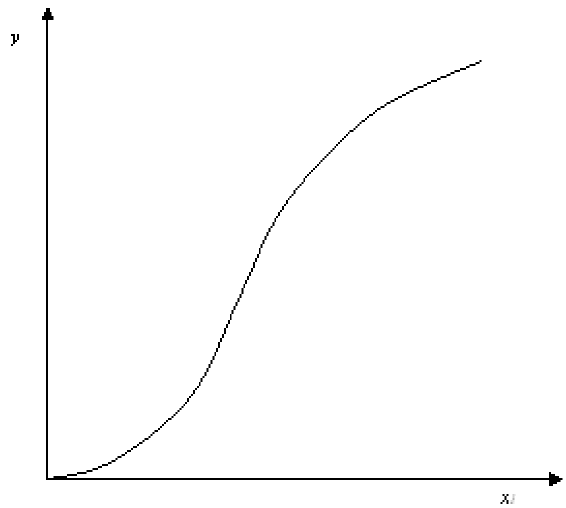


Figure 1. Productivité marginale croissante puis décroissante

3.2 Rendements d'échelle

Lorsqu'on raisonne sur le plus long terme, c'est à dire lorsque l'on peut faire varier tous les inputs simultanément, il peut être intéressant de s'interroger sur les changements d'échelle de production. Que se passe-t-il si l'on multiplie par deux les quantités de tous les inputs, la production est-elle multipliée par deux, ou plus, ou moins?

Definition 9 *La production est à rendements d'échelle strictement croissants si :*

$$\forall \lambda > 1, \forall x, \; f(\lambda x) > \lambda f(x)$$

La production est à rendements d'échelle strictement décroissants si :

$$\forall \lambda > 1, \forall x, \; f(\lambda x) < \lambda f(x)$$

La production est à rendements d'échelle constants si :

$$\forall \lambda > 1, \forall x, \; f(\lambda x) = \lambda f(x)$$

Un cas particulier souvent rencontré est celui des fonction de production homogènes. Rappelons qu'une fonction de production est homogène de degré k lorsque :

$$\forall \lambda, \; f(\lambda x) = \lambda^k f(x)$$

- On voit ainsi qu'une fonction de production homogène de degré k est à rendements croissants si $k > 1$, décroissants si $k < 1$ et constants si $k = 1$.
- Discussion

  L'hypothèse la plus logique semble être celle des rendements constants : une entreprise est en mesure de doubler sa production en répliquant exactement son organisation initiale. Deux usines identiques produisent deux fois ce que produit une usine! Ce raisonnement est un peu simpliste. Il est effectivement peu probable que la solution efficace pour doubler la production consiste à simplement répliquer. Il est vraisemblable au contraire que le fait de doubler la production conduise l'entreprise à changer l'organisation générale de manière à éviter de doubler toutes les fonctions. Par exemple, il serait vraisemblablement inutile de doubler les fonctions "de gestion" (financier, personnel...). Ce raisonnemnt conduit alors à privilégier les rendements d'échelle croissants. Plusieurs arguments plaident en faveur des rendements d'échelle croissants. Le principal est le suivant : une production à grande échelle permet une meilleure division du travail et une meilleure spécialisation des tâches et donc une productivité plus grande. Certaines caractéristiques technologiques peuvent auusi être à l'origine de rendements croissants. Par exemple, les déperditions de chaleur dans un haut fourneau, ou une chambre de congélation sont proportionnelles à la surface, alors que la quantité produite est proportionnelle au volume : un grand équipement est plus efficace que deux petits puisque la surface de contact est moins que deux fois plus importante (elle est multipliée par $2^{2/3}$). Enfin certaines fonctions d'administration et de gestion augmentent moins rapidement que la production

  D'autres arguments plaident au contraire en faveur des rendements décroissants. Le premier tient aux inefficacités qui émergent lorsque la taille grandit. Il peut s'agir de problèmes de communication et d'information. Il peut s'agir aussi de la difficulté et du coût de mise en oeuvre dans les grandes institutions des mécanismes incitatifs qui sont nécessaires au bon fonctionnement de l'entreprise. Dès lors en effet que la structure comporte de nombreux niveaux hiérarchiques, il devient nécessaire de mettre en oeuvre des mécanismes coûteux qui assurent qu'il n'y a pas de rétention d'information ni de mauvaise gestion.

3.3 Exemples de fonctions de production

On donne ici des exemples de fonctions de production à deux facteurs qui sont couramment utilisées. Il s'agit des fonctions de Cobb-Douglas et des fonctions à facteurs complémentaires.

Definition 10 *α et β étant deux paramères positifs, la fonction de Cobb-Douglas s'écrit :*

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

- Propriétés

  La fonction de Cobb-Douglas est homogène de degré $k = \alpha + \beta$. De sorte que les rendements sont croissants lorsque $\alpha + \beta > 1$, constants lorque $\alpha + \beta = 1$, et décroissants si $\alpha + \beta < 1$.

- Les productivités marginales ont une forme particulière :

$$f_1' = \alpha \frac{f(x_1, x_2)}{x_1}$$
$$f_2' = \beta \frac{f(x_1, x_2)}{x_2}$$

Definition 11 *α , a_1, a_2 étant trois paramètres positifs, la fonction de production à facteurs complémentaires s'écrit :*

$$f(x_1, x_2) = \left[\min(\frac{x_1}{a_1}, \frac{x_2}{a_2} \right]^{\alpha}$$

Pour produire une unité de produit il faut a_1 unités de facteur 1 et a_2 unités de facteur 2. *En* revanche pour en produire 2 il faut $2^{\frac{1}{\alpha}} a_i$ unités de bien i. Pour $\alpha = 1$ il s'agit d'une fonction de production de type "réaction chimique" dans laquelle les inputs (réactifs) doivent être dans des proportions données (stoechiométriques).

3.4 Isoquantes et substitution de facteurs

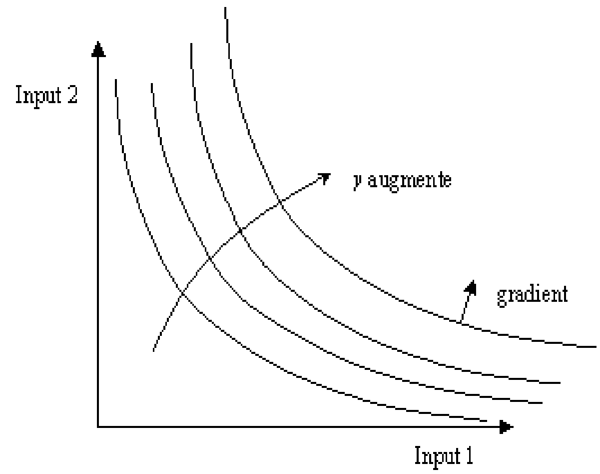
Definition 12 *On appelle isoquantes de production les surfaces de niveau de la fonction de production. Une surface de niveau (associée au niveau de productuion y_0 donné) a pour équation*

$$f(x_1, x_2, ...x_L) = y_0$$

Si l'on note ∇f, le vecteur des productivités marginales. On sait que la surface de niveau passant par un point $(x_1^0, x_2^0, ...x_L^0)$ est orthogonale au gradient ∇f en ce point. En effet (avec un abus de notation):

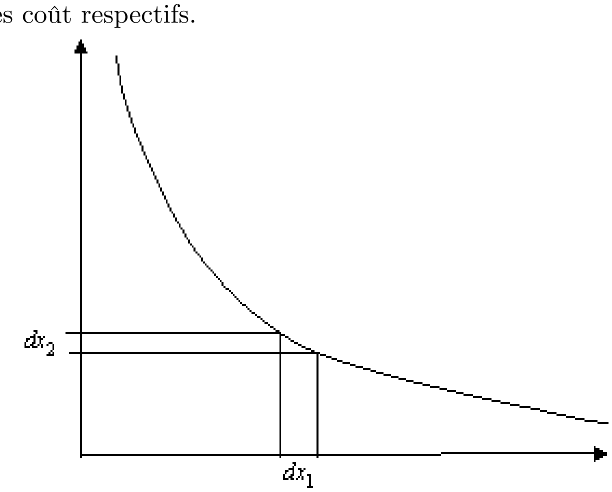
$$dy = \nabla f \bullet dx \text{ et } y = cte \Longrightarrow \nabla f \bullet dx = 0$$

Dans le cas de deux facteurs les isoquantes sont des courbes de niveau.



Courbes de niveau : chaque isoquante correspont à un niveau de production

Lorsqu'on se déplace sur une surface de niveau on "substitue" des inputs tout en maintenant la production constante. La substitution entre inputs est stratégique pour l'entreprise. Par exemple, on conçoit que si un des facteurs se renchérit (s'il devient plus coûteux) alors il peut être intéressant de le remplacer par un autre dans la mesure où la substitution est possible. On peut ainsi remplacer le travail par des machines et réciproquement selon les coût respectifs.



Substitution d'un facteur par l'autre

Il est facile de "mesurer" la facilité de substitution entre deux inputs de la manière suivante. En un point donné, par combien d'input de type 2 faut il remplacer une unité d'input de type 1 pour maintenir la production constante? Techniquement, il s'agit simplement de la pente de l'isoquante au point considéré.

On a :

$dy = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 = 0 \Longrightarrow \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$

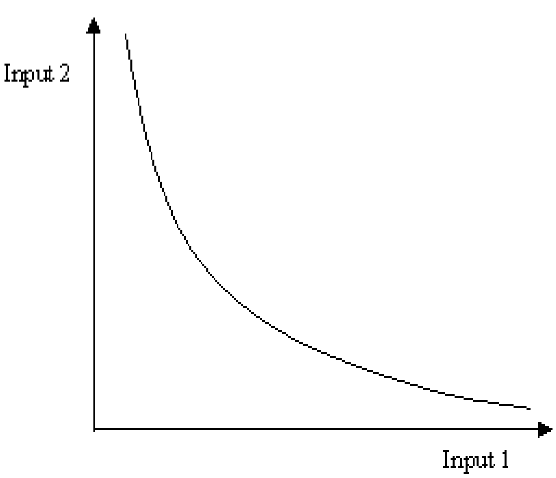
Definition 13 *Le taux marginal de substitution technique de l'input 2 à l'input 1 est par définition égal à :*

$$TMT_{2,1} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_1}}{\frac{\partial f}{\partial x_2}}$$

C'est donc au signe près le rapport des productivités marginales des facteurs considérés.

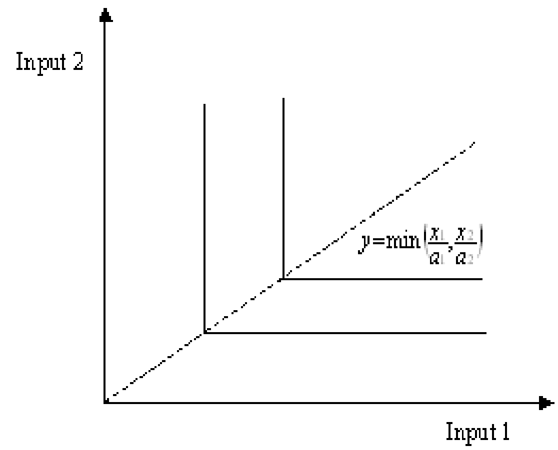
3.5 Exemples

Dans le cas de la fonction de Cobb Douglas les isoquantes ont l'allure suivante :



Isoquante d'une fonction de Cobb-Douglas

Dans le cas de facteurs complémentaires il n'y a pas de substitution possible (le TMT est soit nul soit infini).



Facteurs complémentaires