ENSAE
ECOLE NATIONALE
DE LA STATISTIQUE
ET DE L'ADMINISTRATION
ECONOMIQUE

2e ANNÉE
2004–2005

MICROÉCONOMIE

NOTES DE COURS, M.DOMINIQUE HENRIET

Table des matières

Introduction

La théorie de l'équilibre général, cathédrale conceptuelle de toute première importance a le mérite de formaliser de manière rigoureuse la fameuse loi de l'offre et de la demande. En explicitant de manière claire l'ensemble des hypothèses qui garantissent la validité des fameux « théorèmes du bien-être », elle a permis, indirectement, le développement de nouvelles théories qui explorent justement les situations qu'elle ne traite pas. On a l'habitude de regrouper sous le terme « défaillances du marché »« *market failures* »ces situations qui échappent aux conditions de validité des théorèmes, et donc dans lesquelles le marché fonctionne mal. Ces défaillances peuvent être dues à de multiples causes. L'objet de ce cours est de passer en revue différents modèles dont l'objectif est de rendre compte de ces défaillances. La théorie des jeux et la théorie des contrats seront alors les ingrédients majeurs de notre analyse.

La Théorie de l'Equilibre Général : les deux théorèmes du bien-être, (Rappels)

On peut énoncer de manière succinte les deux théorèmes fondamentaux :

- 1^{er} théorème du bien-être (« théorème libéral ») : Tout équilibre général concurrentiel est Pareto-efficace.
- $2^{\text{ème}}$ théorème du bien-être (« théorème social-démocrate ») : Tout état efficace peut être décentralisé en équilibre concurrentiel général moyennant une redistribution des ressources initiales.

L'objet de ce paragraphe de rappels est d'en esquisser la démonstration. Nous commençons par une version intuitive dans une configuration d'équilibre partiel.

La loi intuitive de l'offre et de la demande

On se donne un ensemble d'acheteurs $i \in \{1, \dots B\}$ et un ensemble de vendeurs $j \in \{1, \dots S\}$ d'un bien donné, parfaitement connu des protagonistes. Chaque acheteur a un prix plafond noté v_i et chaque vendeur un prix plancher c_j.

Quelles sont les transactions mutuellement profitables et celles qui ne le sont pas ?

La transaction entre i et j est mutuellement profitable si : $\exists p_{ij}$ (prix) tel que : $c_j \leq p_{ij} \leq v_i$, ce qui équivaut à : $v_i - c_j \geq 0$

Après la transaction, un bénéfice collectif apparaît : $v_i - c_j$. La transaction crée une valeur qui est répartie entre les deux acheteurs.

Une idée naturelle consiste à chercher l'ensemble des transactions, c'est-à-dire des appariements, qui maximise la somme des bénéfices :

$$\max\{\sum_{\substack{i \in I^* \\ j \in J^*}} (v_i - c_j) \ / \ |I^*| = |J^*|\}$$

Quitte à renuméroter, on suppose dorénavant que : $v_1 \geq v_2 \geq \ldots \geq v_B$ *et* $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_S$

S'il n'y avait qu'une seule transaction à faire, ce serait $v_1 \leftrightarrow c_1$ (maximise le bénéfice sous l'hypothèse $|I| = |J| = 1$). Il est alors clair que le programme :

$$S_k = \max\{\sum_{\substack{i \in I^* \\ j \in J^*}} (v_i - c_j) \ / \ |I^*| = |J^*|\}$$

a pour solution : $I_k = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$, $J_k = \{c_1, c_2, \ldots, c_k\}$.
On a évidemment : $S_{k+1} - S_k = v_{k+1} - c_{k+1}$.
Il suffit ensuite de déterminer le nombre k^* qui maximise S_k. Or la suite S_k est croissante tant que $v_k - c_k$ est positif, donc :

$$k^* = \sup_k \{k \ / \ v_k - c_k \geq 0\}$$

Il est intéressant de constater que le même résultat peut être obtenu par un mécanisme de commissaire priseur : Celui-ci affiche un prix et collecte les offres et les demandes. A un prix donné se porteront offreurs les vendeurs tels que $c_k \leq p$ et demandeurs les acheteurs tels que $p \leq v_k$. Si l'offre est supérieure à la demande, il augmente le prix, sinon il le baisse. L'objectif est de fixer un prix qui égalise offre et demande. Clairement l'équilibre sera obtenu pour un prix tel que : $c_{k^*} \leq p \leq v_{k^*}$ et $v_{k^*+1} < p < c_{k^*+1}$.

Le résultat est clair : le mécanisme de marché permet d'obtenir une configuration qui maximise la somme des bénéfices. C'est une version simple du premier théorème de l'économie du bien-être.

Efficacité au sens de Pareto

Soit une économie à L biens, I individus consommateurs, J « ensembles de production ». On suppose qu'il y a une symétrie d'information à l'égard des L biens. Les marchés sont complets et les individus sont munis d'une fonction d'utilité u_i de $\mathbb{R}^L$ dans $\mathbb{R}$.

On note y_j les vecteurs de production : $y_j \in \mathbb{R}^L$, $y_j = (y_j^1, \ldots y_j^L)$. y_j^p peut être négatif (bien consommé, *input*) ou positif (bien produit, *output*). Un ensemble de production Y est un ensemble de vecteurs de production. En général, on suppose qu'un ensemble de production Y_j peut être défini par son équation $y \in Y_j \Leftrightarrow F_j(y) \leq 0$
On pose : Ω = quantité de biens disponibles au début (dotations initiales)

Allocation réalisable :

Que faire de Ω ?

$$\Omega \begin{cases} \longrightarrow & \textit{distribuer} \\ \longrightarrow & \textit{transformer} \end{cases}$$

L'allocation $x \in \mathbb{R}^{LI}$ est réalisable si et seulement si :

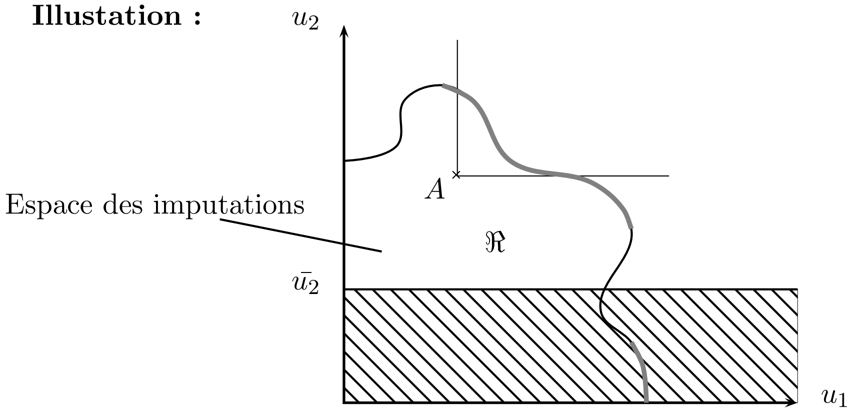
$$\exists y_j \in Y_j \ / \ \sum_i x_i \leq \sum_j y_j + \Omega$$

où $\leq$ désigne ici une inégalité entre les composantes des vecteurs.
On note $\Re$ l'ensemble des allocations réalisables.

Allocation efficace au sens de Pareto (PE)

x est (PE) si et seulement si x est réalisable ($x \in \Re$) et $\nexists x' \in \Re \ / \ \{\forall i,\ u_i(x_i) \leq u_i(x_i')\}$, avec au moins une inégalité stricte.

Illustation :



A n'est pas (PE) compte tenu de la définition : tous les points situés au Nord-Est de A augmentent l'utilité de 1 et 2 avec au moins une augmentation stricte. En gris, on a tracé l'ensemble des allocations (PE). Pour les trouver, on cherche les points n'ont pas d'allocations réalisables à leur Nord-Est ou, on fixe u_2 et on cherche l'allocation qui maximise u_1 (on ignore la partie hachurée $\leftarrow$ contraintes).

On écrit :

$$\max_{x_1} \qquad u_1(x_1)$$
$$s.c. \begin{cases} u_i(x_i) \geq v_i,\ i \in [\![2, I]\!] & (\alpha_i) \\ \sum_i x_i \leq \sum_j y_j + \Omega & (\lambda_l) \\ F_j(y_j) \leq 0 & (\beta_j) \end{cases}$$

On pose $\alpha_1 = 1$
CN1$^{\text{er}}$O : $\alpha_i \nabla u_i = \lambda = \beta_j \nabla F_j$

Les gradients ∇u_i sont tous parallèles entre eux, et parallèles aux gradients ∇F_j
petit rappel : $\max\limits_{\substack{g_1(x) \geq 0 \\ g_2(x) \geq 0}} f(x)$

Conditions de Kühn et Tücker : $\begin{cases} \nabla f(x) + \lambda_1 \nabla g_1(x) + \lambda_2 \nabla g_2(x) = 0 \\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 g_1 = 0,\ \lambda_2 g_2 = 0 \end{cases}$

$TMS = \dfrac{\frac{\partial u_i}{\partial x_i^h}}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i^l}} = \dfrac{\frac{\partial u_j}{\partial x_j^h}}{\frac{\partial u_j}{\partial x_j^l}}$. C'est la quantité de bien l que i est prêt à abandonner pour avoir une

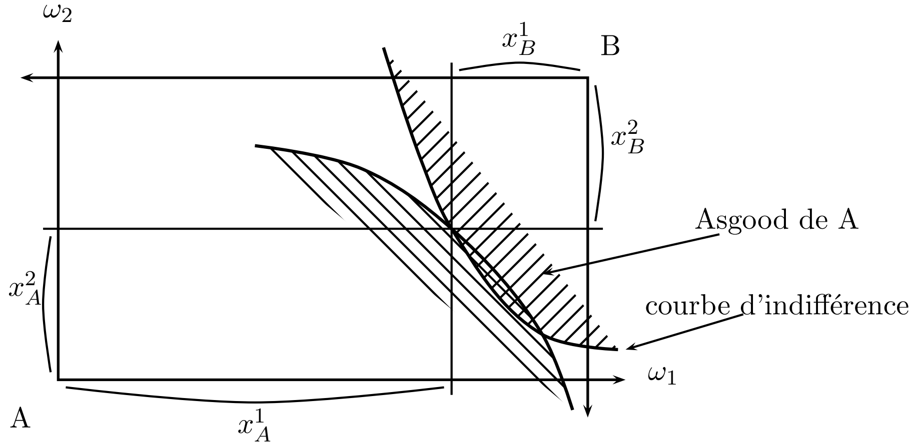
unité de bien h.
(taux de troc de M.i)

Les « taux de troc » doivent être les mêmes pour les deux individus. Si tel n'était pas le cas, un *deal* serait possible entre les deux.
On doit aussi avoir :

$$TMT = \frac{\frac{\partial F_j}{\partial y_j^k}}{\frac{\partial F_j}{\partial y_j^l}} = \frac{\frac{\partial F_m}{\partial y_m^k}}{\frac{\partial F_m}{\partial y_m^l}}$$

Illustration : boîte d'Edgeworth

L=2, I=2. On note A et B les individus.



Il n'y a pas de production dans cette économie, c'est une pure économie d'échanges. L'intérieur du rectangle représente l'ensemble des allocations réalisables. On cherche maintenant les allocations (PE)

Définition : $\text{Asgood}_i(x) = \{x' \ / \ u_i(x') \geq u_i(x)\}$={paniers préférés par i à x}

On dit que les préférences sont convexes lorsque les Asgoods sont des ensembles convexes.
Hyp. : on prend les préférences croissantes. On a alors :

$$\begin{array}{lll} \text{(PE)} & \Leftrightarrow & \text{courbes d'indifférence tangentes} \\ & \Leftrightarrow & \text{les gradients sont colinéaires} \end{array}$$

Equilibre

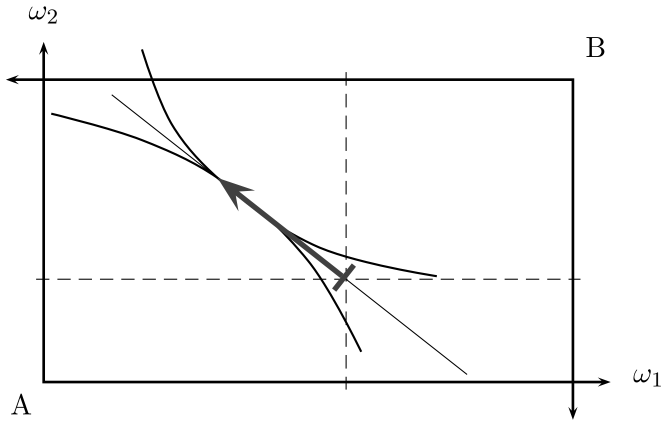
On fait les hypothèses suivantes :
- $\exists$ propriété privée
- ω_i^l = dotation initiale de i en l (on a : $\sum_i \omega_i = \Omega$)
- θ_{ij} = part possédée par i dans l'entreprise j (on a : $\sum_i \theta ij = 1$

Définition :

(x^*, y^*, p^*) est un équilibre concurrentiel si et seulement si :
- $\forall i, \ x_i^* \in \arg\max\{u_i(x_i) \ / \ p_i^* x_i \leq p^* \cdot \omega_i + \sum_j \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*\}$
- $y_j^* \in \arg\max\{p^* \cdot y_j \ / \ y_j \in Y_j\}$
- $\sum_i x_i^* = \sum_j y_j^* + \Omega$[1]

[1] « Dans la nature, rien ne se perd, rien ne se créée : tout se transforme. » Lavoisier

N.B. : $(x^* \in \mathbb{R}^{LI},\ y^* \in \mathbb{R}^{LJ},\ p^* \in \mathbb{R}_+^L)$



$\longmapsto$: vecteur excès de demande

Lorsque le vecteur excès de demande est nul, il y a équilibre concurrentiel.

Les deux théorèmes

• **Théorème « libéral » :** Si les u_i sont $\uparrow$, alors tout équilibre est efficace.

• **Théorème « social-démocrate » :** Sous les hypothèses de convexité (fonctions d'utilité continues, croissantes, convexes), toute allocation Pareto-efficace peut-être obtenue comme équilibre concurrentiel, moyennant une redistribution des ressources initiales.

Chapitre 1

Introduction à la théorie des jeux

1.1 Introduction

Il existe de multiples exemples, dans le domaine de l'économie, mais aussi plus largement, dans un grand nombre d'activités humaines, de situations dans lesquelles il existe une interaction entre différents acteurs, c'est-à-dire lorsque le résultat d'un processus dépend de l'ensemble des actions prises par différents agents. L'objet de la théorie des jeux est la formalisation de ces interactions pour tenter (approche positive) d'en prédire l'évolution, ou (approche normative) de conseiller le ou les joueurs sur le meilleur coup à jouer. L'exemple emblématique de jeu est le « jeu de société » : la règle du jeu spécifie les actions possibles et leur résultats. Aux échecs par exemple le résultat dépend de ce que jouent les blanc et les noirs en respectant les modes de déplacement des pièces.

Un jeu peut comporter un conflit d'intérêt, c'est-à-dire une situation dans laquelle il y a antagonisme dans les issues. Mais il peut aussi comporter de la convergence d'intérêts, et le problème qui se pose est alors celui de la coordination des actions.

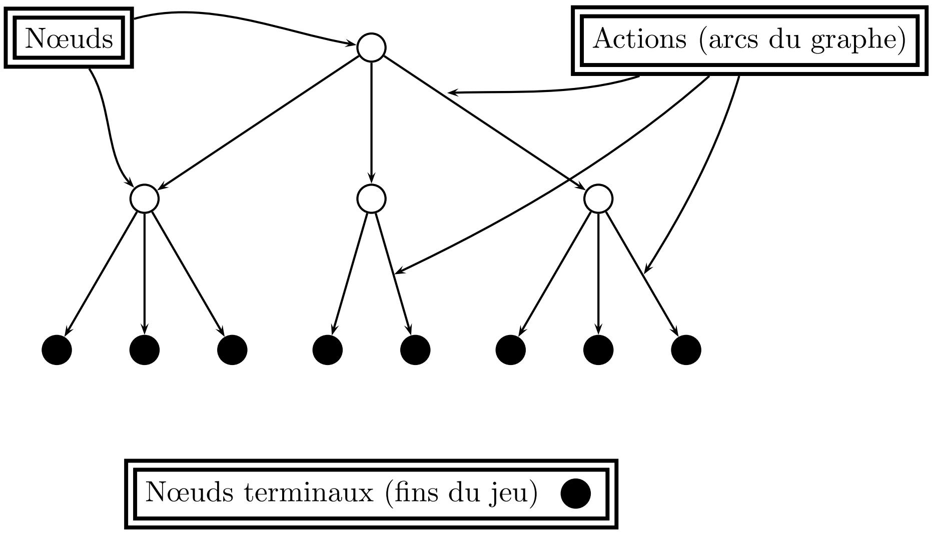
Nous raisonnons ici dans un cadre dit « non coopératif ». Autrement dit les acteurs sont supposés prendre leurs décisions librement sans possibilité de concertation et d'engagement *a priori*.

1.2 Jeux sous forme extensive

1.2.1 Représentation

Définition 1 : arbre du jeu

– arbre (graphe connexe sans cycle[1]) représentant les déroulements possibles du jeu :



– à chaque nœud non terminal est associé un **joueur** : arrivé à ce point du jeu c'est à son tour de jouer.
– Chaque arc représente chacune **des actions** (coups autorisés par la règle) que ce joueur peut prendre à ce point du jeu.
– à chaque **nœud terminal** correspond un résultat du jeu donné de manière générale par un vecteur dit vecteur des paiements (liste des gains attribués à chaque joueur).

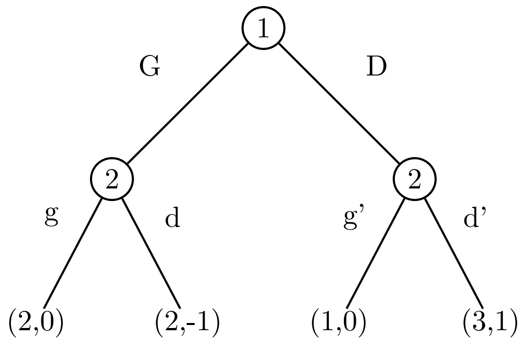
Définition 2 : jeu fini en information parfaite

Un jeu sous forme extensive, en information parfaite, est défini par :
– l'ensemble des **joueurs** $i \in \{1, 2, \ldots, N\}$
– l'**arbre** du jeu : constitué d'un ensemble fini de nœuds $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$ muni d'une relation de « succession ».
  * Le nœud initial (début du jeu) n'est le successeur d'aucun autre nœud.
  * Chaque nœud (non initial) est le successeur d'un seul nœud.
  * Les nœuds terminaux n'ont pas de successeurs
    (on note $s(t)$, l'ensemble des successeurs d'un nœud t)
– à chaque nœud t (non terminal) est associé un joueur $i(t)$. A ce point du jeu c'est à $i(t)$ de jouer.
– A chaque nœud t est associé un ensemble d'actions $A(t)$, à chaque action correspond un nœud successeur unique dans $s(t)$.

[1]Définition :
On se donne un ensemble (fini) de nœuds T et une relation « de succession » : σ sur T telle que :
(i) $\exists! a_0, \forall a \in T\ \neg(a_0 \sigma a)$ (un nœud initial)
(ii) $\forall a \neq a_0, \exists! b\ a \sigma b$ (un prédécesseur unique)
(iii) Si on note $s(a) = \{b, b \sigma a\}$ on doit avoir, $\forall a, \forall n \in \mathbb{N}, a \notin s^n(a)$ (pas de cycle)

– A chaque nœud terminal z est associé un vecteur des paiements. $u(i, z)$ est le gain du joueur i si le jeu se termine au nœud z.

Exemple 1



Dans le jeu ci-dessus :
- lorsque 1 joue G et 2 joue g, les gains sont 2 pour le joueur 1 et 0 pour le joueur 2.
- lorsque 1 joue G et 2 joue d, les gains sont 2 pour le joueur 1 et -1 pour le joueur 2.
- lorsque 1 joue D et 2 joue g', les gains sont 1 pour le joueur 1 et 0 pour le joueur 2.

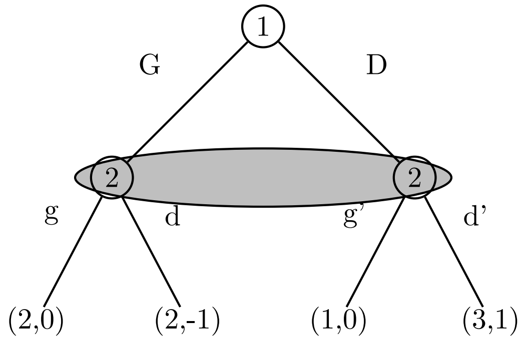
Remarque : le joueur 2 observe ce qu'a joué le joueur 1 ! De nombreux jeux entrent dans cette catégorie, évidemment les graphes associés peuvent être plus ou moins compliqués !

1.2.2 Information imparfaite

Pour prendre en compte les situations dans lesquelles un joueur n'a pas les moyens d'observer certaines des actions d'un autre joueur, on introduit la notion d'ensemble d'information :

> Définition : Un ensemble d'information est un ensemble de nœuds indiscernables pour le joueur à qui c'est le tour de jouer. Evidemment, en deux nœuds appartenant à un même ensemble d'information, les actions possibles doivent être strictement les mêmes (sinon les nœuds ne seraient pas indiscernables).

Exemple 2



Le joueur 2 ne sait pas ce qu'a joué 1. Tout se passe comme si 1 et 2 jouaient simultanément.

1.3 Forme normale d'un jeu

1.3.1 Stratégies et forme normale

Définition 3 : stratégies et forme normale

- une stratégie (*ex ante*) est la donnée d'une liste des actions qu'un joueur projette de jouer à chacun des nœuds (ou ensembles d'information) où il aura potentiellement la main. On note X_i l'ensemble des stratégies du joueur i pour le jeu donné.
- Un jeu sous forme normale est défini par :
  - N, ensemble des joueurs
  - $X = \prod_i X_i$, l'ensemble des stratégies
  - Les fonctions de paiement qui spécifient le gain de chaque joueur en fonction des stratégies jouées par l'ensemble des joueurs :

$$u_i : X \to \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \dots x_N) \mapsto u_i(x_1, x_2, \dots x_N)$$

Un jeu sous forme normale sera ainsi noté $\Gamma(N, X, (u_i)_{i=1\dots N})$

Il est important de noter qu'une stratégie est un objet « compliqué » au sens où le joueur définit l'ensemble des actions qu'il prendra en tout point où il aura la main ! Tout se passe comme si le joueur devait programmer une machine pour jouer à sa place : il ne doit pas laisser de situations imprévues (y compris celles qui pourraient apparaître absurdes !) ! Il est usuel de représenter un jeu fini à deux joueurs sous forme normale par le tableau des gains. Pour le jeu de l'exemple 1 la forme normale s'écrit :

Exemple 1

	gg'	gd'	dg'	dd'
G	2 0	2 0	2 -1	2 -1
D	1 0	3 1	1 0	3 1

Exemple 2

	g	d
G	2 0	2 -1
D	1 0	3 1

1.3.2 Jeux à deux joueurs à somme nulle

Définition : On dit qu'un jeu à 2 joueurs est à somme nulle si :

$$\forall x_1, x_2\ u_1(x_1, x_2) + u_2(x_1, x_2) = 0$$

Ainsi, ce que gagne l'un est perdu par l'autre. Lorsque le résultat du jeu pour un joueur est le gain la perte ou la partie nulle (sans spécification du montant en jeu), on écrit $u_i(x) = 1, -1$ *ou* 0.

1.4 Le problème stratégique

Ayant ainsi défini un jeu sous forme extensive puis sous forme normale, la première question qui se pose est simple : peut-on raisonnablement prédire les comportements qui vont être adoptés par les joueurs ? Le caractère « interactif » d'un jeu implique que la réponse à cette question n'est pas immédiate. Dans un jeu à deux joueurs par exemple, chaque joueur se pose la question de savoir quelle stratégie sera adoptée par l'autre pour réagir en conséquence. Mais il sait que l'autre est dans la même situation.

1.4.1 Comportement prudent

L'analyse d'un jeu à somme nulle permet de mettre en évidence le type de problème rencontré.

Imaginons le raisonnement suivant du joueur 1. Si je joue la stratégie x et que l'autre le sait, il jouera en conséquence, c'est-à-dire qu'il adoptera une stratégie qui maximise son gain pour x. Comme le jeu est à somme nulle, il choisira une stratégie qui minimise en y $u_1(x,y)$ (en supposant qu'une telle stratégie existe). J'obtiendrai ainsi $v_1(x) \equiv \min_y u_1(x,y)$. Mon choix est alors très simple : j'adopterai une stratégie qui maximise v_1, et j'obtiendrai ainsi $\max_x \min_y u_1(x,y)$. Remarquons ici, que tout se passe comme si 1 jouait « en premier » et adoptait la meilleure stratégie qui tienne compte de la réponse optimale de 2.

Définition 4 : stratégies prudentes

Dans un jeu à somme nulle, on appelle « paiement minimum garanti du joueur 1 » la valeur de $\max_x \min_y u_1(x,y) \equiv \alpha_1$.

C'est effectivement le paiement minimum garanti dans le sens où il existe une stratégie qui assure ce paiement au joueur, cette stratégie, $\arg\max_x \min_y u_1(x,y)$ est appelée stratégie prudente.

Un autre raisonnement est cependant possible. Le joueur 1 peut parfaitement se dire que 2 tiendra exactement le raisonnement précédent ! Tout se passe alors comme si 1 jouait en second. Si 2 joue y j'ai intérêt à répondre une stratégie qui maximise en x $u_1(x,y)$. J'obtiendrai alors $w_1(y) = \max_x u_1(x,y)$, alors que 2 obtiendra $v_2(y) = \min_x u_2(x,y) = -\max_x u_1(x,y)$. Je peux en déduire que 2 aura intérêt à jouer une stratégie qui maximise $v_2(y)$. 2 obtiendra alors, $\alpha_2 \equiv \max_y \min_x u_2(x,y) = \max_y (-\max_x u_1(x,y)) = -\min_y \max_x u_1(x,y)$ et j'obtiendrai donc $\beta_1 \equiv \min_y \max_x u_1(x,y) = -\alpha_2$.

Remarque : il est facile de voir que l'on a :

$$\max_x \min_y u_1(x,y) \equiv \alpha_1 \leq \beta_1 \equiv \min_y \max_x u_1(x,y) = -\max_y \min_x u_2(x,y) = -\alpha_2$$

Deux cas de figure peuvent alors se présenter :
- Si $\alpha_1 = \beta_1$, c'est-à-dire si $\max_x \min_y u_1(x,y) = \min_y \max_x u_1(x,y)$, les deux raisonnements sont « compatibles » et on peut imaginer que chacun des deux joueurs va adopter une stratégie « prudente ».
- Sinon, $\alpha_1 < \beta_1$, il y a conflit entre les deux raisonnements, chacun aimerait pouvoir jouer en second !

1.4.2 Elimination des stratégies dominées

Stratégies dominées

Prédire le comportement est ainsi chose difficile. On peut cependant sérier les problèmes et tenter de proposer certains principes de comportement raisonnables. D'une manière générale, on peut se poser une première question : existe-t-il des stratégies qui n'ont aucune chance d'être jouées rationnellement par les joueurs ?

Définition 5 : Dominance

Etant donné un jeu sous forme normale $\Gamma(N, X, (u_i)_{i=1\dots N}))$, On dit que la stratégie x_i^0 est **strictement dominée** par la stratégie x_i^1 pour le joueur i si et seulement si :
$\forall x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n,\ u_i(x_1, \dots x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots x_n) < u_i(x_1, \dots x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, \dots x_n)$ que l'on peut réécrire sous une forme plus lisible : $\forall x_{-i},\ u_i(x_{-i}, x_i^0) < u_i(x_{-i}, x_i^1)$.

Contre toute « défense », jouer la stratégie x_i^1 donne toujours **strictement plus** au joueur i que jouer x_i^0.

On dit que la stratégie x_i^0 est **faiblement dominée** par la stratégie x_i^1 pour le joueur i si et seulement si :
$\forall x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n,\ u_i(x_1, \dots x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots x_n) \leq u_i(x_1, \dots x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, \dots x_n)$ que l'on peut réécrire sous une forme plus lisible : $\forall x_{-i},\ u_i(x_{-i}, x_i^0) \leq u_i(x_{-i}, x_i^1)$.

Contre toute « défense », jouer la stratégie x_i^1 donne toujours **au moins autant** au joueur i que jouer x_i^0.

On dit que la stratégie x_i^0 est **dominée** par la stratégie x_i^1 pour le joueur i si et seulement si :
$\forall x_1, \dots x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_n,\ u_i(x_1, \dots x_{i-1}, x_i^0, x_{i+1}, \dots x_n) \leq u_i(x_1, \dots x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, \dots x_n)$ que l'on peut réécrire sous une forme plus lisible : $\forall x_{-i},\ u_i(x_{-i}, x_i^0) \leq u_i(x_{-i}, x_i^1)$, **avec une inégalité stricte au moins.**

Contre toute « défense », jouer la stratégie x_i^1 donne toujours **autant et au moins une fois plus** au joueur i que jouer x_i^0.

On dit qu'une stratégie est dominante si elle domine toutes les autres. Si une stratégie dominante existe elle est évidemment unique, en effet si deux stratégies étaient simultanément dominantes elles donneraient les mêmes paiements au joueur, ce qui contredit l'existence d'une inégalité stricte au moins. En revanche, il peut parfaitement exister plusieurs stratégies faiblement dominantes. Il est clair que si un joueur possède une stratégie dominante il la jouera et le jeu sera résolu. En revanche la faible dominance peut ne pas déboucher...

Exemples

Le jeu emblématique : dilemme du prisonnier (A est une stratégie dominante pour chacun)

	A	P
A	0 0	2 -1
P	-1 2	1 1

Le renvoi d'ascenseur (toutes les stratégies sont faiblement dominantes, elles ne sont pourtant pas équivalentes !) :

	A	P
A	0 0	1 0
P	0 1	1 1

Algorithme d'élimination des stratégies dominées

Une idée à première vue assez simple, consiste à remarquer qu'un joueur ne jouera certainement pas une stratégie strictement dominée. Cette remarque de bon sens va pourtant assez loin. Chaque joueur peut faire ce raisonnement et ainsi effacer de la forme normale les lignes et les colonnes qui correspondent à des stratégies strictement dominées. Mais une fois ce premier nettoyage réalisé, il est possible que des stratégies (non dominées initialement) le deviennent de sorte qu'un second nettoyage s'impose. Cet algorithme d'élimination successive peut être fait par chacun des joueurs.

`Horrible schéma à reproduire ultérieurement`[2]

L'élimination successive des stratégies strictement dominées ne dépend pas de l'ordre d'élimination, ni du fait que les joueurs éliminent de façon séquentielle ou simultanée. Elle converge vers un jeu réduit, qui est bien défini. Si c'est un singleton (une seule stratégie pour chacun) on a un candidat à un équilibre évident.

On peut concevoir le même raisonnement en éliminant les stratégies dominées (non strictement). Dans ce cas l'algorithme peut dépendre de l'ordre et de la manière dont les joueurs éliminent.

Exemple

Chaque joueur doit donner un nombre entier entre 0 et 100, on calcule la moyenne, le gagnant est celui dont le pari est le plus proche de la **demi-moyenne**.

1.5 Equilibres de Nash

Evidemment, les concepts précédents peuvent ne rien donner. Si aucune stratégie n'est dominée, le problème reste entier. Un concept plus faible permet, dans un grand nombre de cas une résolution intéressante des jeux.

1.5.1 Meilleure réponse

Définition 6 : correspondance de meilleure réponse

On appelle correspondance de meilleure réponse du joueur i la correspondance qui à chaque vecteur de stratégies des autres joueurs associe les stratégies qui maximisent le paiement de i :

$$MR_i \ : \ x_{-i} \mapsto \arg\max_x u_i(x_{-i}, x)$$

Cette correspondance est bien définie dès lors que, par exemple l'ensemble des stratégies est fini, ou bien lorsque l'ensemble des stratégies est compact et la fonction u_i continue. C'est une fonction lorsque le maximum est unique. C'est le cas lorsque la fonction u_i est strictement concave.

Un équilibre de Nash est un point fixe de la correspondance de meilleure réponse :

[2] soit jamais si vous n'y voyez aucun inconvénient.

1.5.2 Equilibre de Nash

Définition 7

$x^* = (x_i^*)$ est un équilibre de Nash si et seulement si :

$$\forall i, \forall s \in X_i \ u_i(x_{-i}^*, x_i^*) \geq u_i(x_{-i}^*, s)$$

c'est-à-dire :

$$\forall i, \ x_i^* \in MR_i(x_{-i}^*)$$

Il est facile de voir qu'il existe des jeux pour lesquels il n'existe pas d'équilibre de Nash, d'autres où il en existe plusieurs.

Exemples

- « Pierre, ciseaux, feuille » : Les ciseaux coupent la feuille qui emballe la pierre qui casse les ciseaux !
  Pas d'équilibre de Nash

	P	C	F
P	0 0	1 -1	-1 1
C	-1 1	0 0	1 -1
F	1 -1	-1 1	0 0

- Carrefour : deux voitures arrivent à une intersection, et il n'y a ni feu rouge ni règle de priorité. . .
  2 équilibres (Passe, Stop) et (Stop, Passe)

	P	S
P	-1 -1	2 1
S	1 2	0 0

- Bataille des sexes : Le mari et la femme doivent se retrouver au spectacle ce soir, mais ils ne savent pas si c'est au Théâtre ou à la Boxe, et ils ne peuvent communiquer !
  (2 équilibres !)

	T	B
T	3 2	1 1
B	1 1	2 3

Dans le dilemme du prisonnier (cf. plus haut) il existe un équilibre de Nash unique (c'est évidemment l'équilibre en stratégies dominantes). Cet équilibre est très peu efficace : une coordination sur (P,P) donne plus à chacun des joueurs.

1.5.3 Existence d'un équilibre de Nash

L'existence d'un équilibre de Nash dans un jeu est liée à l'existence d'un point fixe dans la correspondance de meilleure réponse. Les théorèmes de points fixes permettent ainsi de caractériser les situations dans lesquelles un équilibre existe. Le résultat le plus communément utilisé est le suivant :

Théorème 1

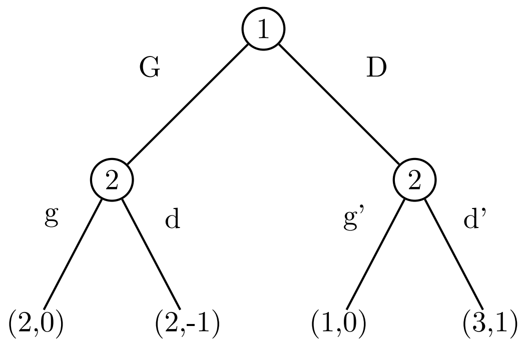
- Si les ensemble de stratégies sont des convexes, compacts,
- Si les fonctions de paiement sont quasi-concaves et continues,

alors il existe un équilibre de Nash.

Le théorème précédent permet d'assurer l'existence d'un équilibre de Nash si l'on autorise les stratégies « mixtes » dans les jeux finis. On dit qu'un joueur joue une stratégie mixte lorsqu'il tire au sort, selon une loi donnée, entre ses différentes stratégies, les paiements associés étant simplement les espérances de paiement. Si un joueur dispose de p stratégies, l'exemple des stratégies mixtes est l'ensemble des p-uplets de nombres positifs et inférieurs à 1 dont la somme est 1. Cet ensemble est un convexe compact. Dans le jeu Pierre Ciseaux Feuille, jouer avec une probabilité $\frac{1}{3}$ P, C et F est un équilibre de Nash.

1.6 Equilibre Parfait

Reprenons l'exemple 1, et cherchons les équilibres de Nash. Les meilleures réponses sont les suivantes :



$gg' \to G \to \{gg', gd'\}$ $dd' \to D \to \{dd', gd'\}$
$gd' \to D \to \{dd', gd'\}$ $dg' \to G \to \{gg', gd'\}$

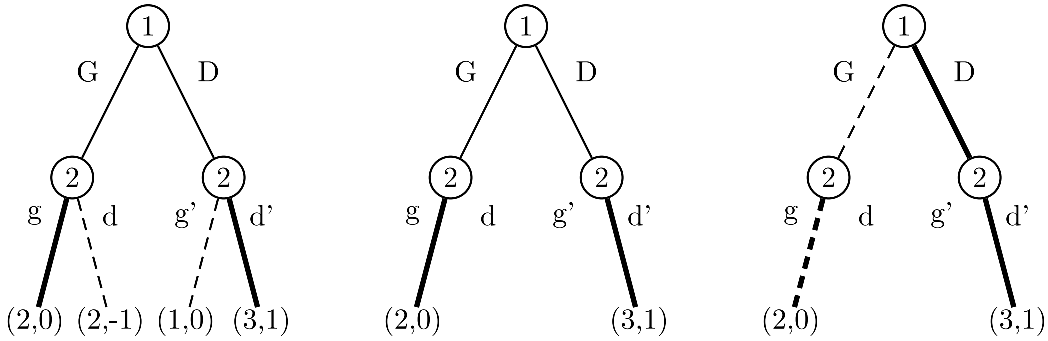
Il existe 2 équilibres de Nash : (gg', G) qui aboutit au paiement $(2, 0)$ et $(dd' \text{ } ou \text{ } gd', D)$ qui aboutit à $(3, 1)$.

Le premier équilibre de Nash repose sur un comportement quelque peu surprenant : 2 joue gg' c'est-à-dire qu'il « annonce » qu'il jouera g' si 1 joue D. Ce qui n'est pas très rationnel puisque si 1 joue D, 2 a strictement intérêt à jouer d' ! Cet équilibre de Nash repose ainsi sur une **menace non crédible**. Comment faire pour éviter ce genre de résultat ? L'idée est simple, il faut demander que la stratégie soit **séquentiellement rationnelle** : elle doit prévoir un comportement « optimal » en tout point de l'arbre, c'est-à-dire même en dehors de la trajectoire qui sera jouée à l'équilibre : 1 peut raisonnablement anticiper que 2 jouera d' (et pas g') s'il joue D, et anticiper qu'il jouera g s'il joue G. Il en résulte qu'il doit comparer l'issue Gg' à Dd' et donc choisir de jouer D (ce qui correspond au second équilibre de Nash).

1.6.1 Algorithme de Kühn dans un jeu à information parfaite

Le raisonnement précédent peut être généralisé à tout jeu fini en information parfaite. L'algorithme est le suivant :

Plaçons nous en fin de jeu, en un nœud prédécesseur d'un nœud terminal. Imaginons que le déroulement du jeu conduise à ce point. On peut anticiper que le joueur en question, jouera de manière optimale et choisira l'action (on suppose ici qu'il n'y a pas d'indifférence pour simplifier) qui maximise son gain. On peut donc effacer les autres actions issues de ce nœud. Le comportement devient d'une certaine manière totalement prévisible et on peut remplacer le nœud en question par le nœud terminal (avec les paiements correspondants) associé à l'action optimale. On recommence la procédure d'analyse pour les autres nœuds qui précèdent immédiatement les nœuds terminaux. A chaque étape de l'algorithme, l'arbre est (strictement) réduit. Si l'on répète l'opération on débouche nécessairement sur le nœud initial. Le jeu est réduit à un problème de décision simple du premier joueur !



Définition 8 : équilibre parfait

équilibre parfait dans un jeu sous forme extensive en information parfaite.

Le résultat de l'algorithme de Kühn est appelé équilibre parfait.

Remarquons qu'il existe toujours au moins un équilibre parfait pour ce type de jeu : l'algorithme de Kühn converge toujours.

Remarquons aussi qu'algorithme de Kühn et élimination des stratégies dominées sont deux procédures très similaires. On peut montrer facilement qu'un équilibre par élimination des stratégies dominées est un équilibre parfait. En revanche la réciproque n'est pas toujours vraie, il suffit pour s'en convaincre de remplacer le paiement 3 par le paiement 2 dans le jeu précédent : il existe alors deux équilibre parfaits (Dd', mais aussi Gg), alors que l'issue Gg ne peut être obtenue par élimination des stratégies dominées. En revanche les deux concepts coïncident dès lors qu'il n'y a pas d'indifférence (et donc pas d'ambiguïté dans l'algorithme de Kühn).

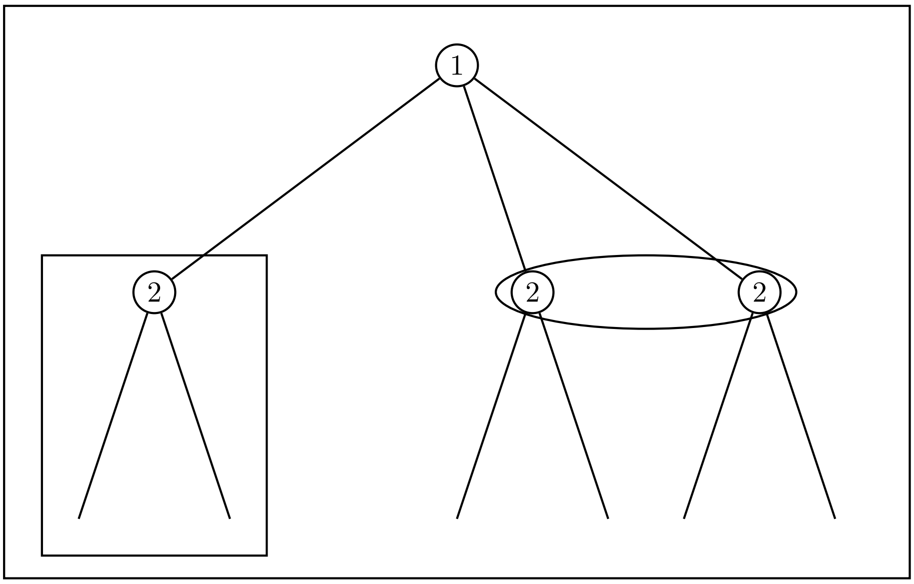
1.6.2 Equilibre parfait en sous-jeux

Le concept précédent peut être généralisé dans le cas de jeux sous forme extensive en information imparfaite. L'idée est simple : l'algorithme de Kühn est fondée sur l'idée de cohérence interne : chaque joueur anticipe **pour toute suite possible** que les autres joueraient de **manière optimale** s'ils étaient conduits à cette séquence du jeu. Peut-on transposer cette idée à des jeux où il existe des ensembles d'information non réduits à des singletons ?

Définition 9 : Sous-jeu

On appelle sous-jeu d'un jeu donné, le jeu défini par un sous-arbre commençant en un ensemble d'information réduit à un singleton.

Exemple : deux sous-jeux (encadrés)



Définition 10 : équilibre parfait en sous-jeux

Un équilibre parfait en sous-jeux (ou Nash parfait) d'un jeu (sous forme extensive) est constitué de stratégies qui sont en équilibre de Nash dans tous les sous-jeux.

Remarque : Lorsqu'un sous-jeu est réduit à un jeu à 1 joueur, le concept d'équilibre de Nash est dégénéré, la stratégie doit simplement prévoir un comportement optimal.

Remarque : Le concept d'équilibre parfait en sous-jeux coïncide avec celui d'équilibre parfait lorsque le jeu est en information parfaite.

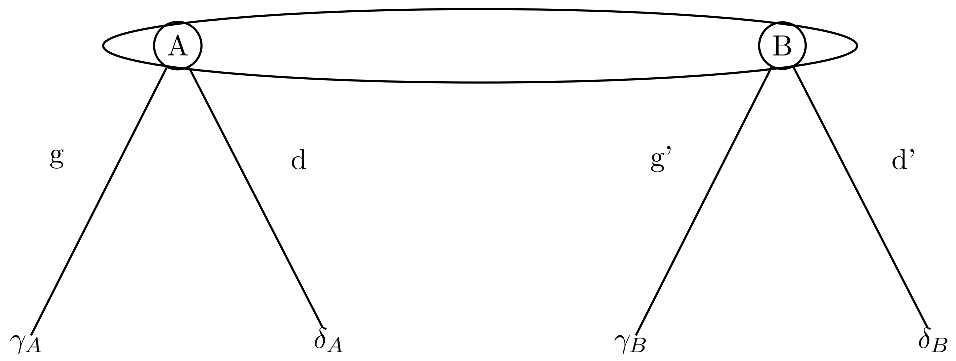
Exemple : jeu en deux étapes (information presque parfaite)

Un jeu à deux joueurs, en deux étapes (ou périodes) se déroule de la manière suivante. Dans une première période chacun des deux joueurs choisit une stratégie K_i. Au début de la seconde étape chacun observe les choix opérés en première et doit choisir une action de deuxième étape x_i. Les paiements finaux sont $u_i(K_1, K_2, x_1, x_2)$.

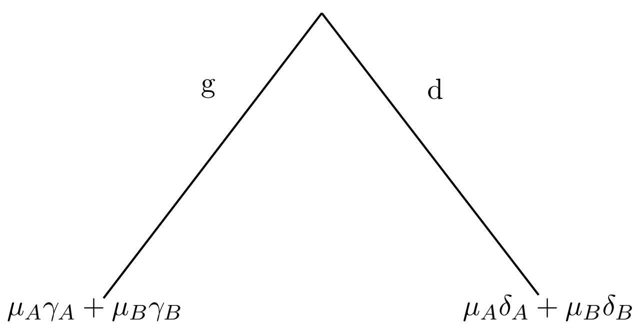
Pour chaque couple (K_1, K_2), on cherche les équilibres de Nash en x_1,x_2. Notons un équilibre de Nash de ce sous-jeu $x_1^*(K_1, K_2), x_2^*(K_1, K_2)$. Un équilibre de Nash parfait doit être tel que les stratégies de première période constituent un équilibre de Nash du jeu ayant les paiements $\hat{u}_i(K_1, K_2) \equiv u_i(K_1, K_2, x_1^*(K_1, K_2), x_2^*(K_1, K_2))$.

1.7 Equilibre Bayésien Parfait

Dans le concept précédent, un sous-jeu commence en un ensemble d'information singleton. Dans l'exemple de la définition, par exemple, il n'y a que deux sous jeux. En un ensemble d'information non réduit à un singleton, il n'est pas en général possible de mettre en œuvre l'algorithme de Kühn (sauf, s'il existe une stratégie dominante...). Prenons l'exemple suivant (on ne mentionne que les paiements du joueur en question) :



Evidemment, si $\delta_A > \gamma_A$ et $\delta_B > \gamma_B$ (ou $\delta_A < \gamma_A$ et $\delta_A < \gamma_A$) le problème du joueur est trivial. En revanche on ne peut rien dire lorsque on a par exemple $\delta_A > \gamma_A$ et $\delta_B < \gamma_B$, sauf si l'on fait une hypothèse sur les probabilités respectives des nœuds A et B. S'il y a de grandes chances d'être en A, le joueur jouera d. On voit ainsi que l'on peut « généraliser l'algorithme de Kühn » à condition d'affecter des probabilités aux nœuds des ensembles d'information et de remplacer les gains par les espérances de gain associées. On appelle croyances ces probabilités. A croyances données μ_A et $\mu_B = 1 - \mu_A$, on peut remplacer le morceau d'arbre précédent par :



Si l'on opère de la même façon pour tous les ensembles d'information, on peut mettre en œuvre l'algorithme de Kühn et déboucher sur un équilibre !

Evidemment l'équilibre trouvé dépend des croyances. A croyance donnée on a un équilibre :

$$\mu \to eq(\mu)$$

Cet équilibre donne les stratégies que doivent suivre les joueurs. Si ces stratégies sont incohérentes avec les croyances alors on n'est pas à l'équilibre ! Par exemple si supposer que $\mu_A = 1$

conduit à des stratégies d'équilibre telles que le nœud B a une probabilité 1 d'être atteint, on est dans une situation incohérente.

Autrement dit, si l'on se donne des stratégies, (éventuellement mixtes) on peut calculer les probabilités (associées à ces stratégies) des nœuds de l'arbre « sur la trajectoire induite par les stratégies ». Pour les autres nœuds on peut affecter n'importe quelle probabilité.

$$x \to \hat{\mu}(x)$$

Définition 11 : équilibre Bayésien Parfait

(x^*, μ^*) est un équilibre Bayésien parfait si : $\mu^* \in \hat{\mu}(eq(\mu^*))$ et $x^* \in eq(\hat{\mu}(x^*))$.

Chapitre 2

Théorie des Contrats

2.1 Généralités

2.1.1 Introduction

La relation économique la plus simple que l'on puisse rencontrer est celle qui met en présence un acheteur et un vendeur. L'un souhaite acheter le produit, l'autre souhaite le vendre : une affaire peut être conclue si chacun y trouve son compte, c'est-à-dire si le prix est inférieur au consentement à payer de l'acheteur et supérieur au prix plancher du vendeur.

Dans ce cas de figure, la transaction « crée de la valeur » : chacun des protagonistes ayant librement accepté la transaction a le sentiment d'avoir gagné au change. Si v est le consentement à payer de l'acheteur, c'est-à-dire le prix au-delà duquel il ne pense pas faire une affaire, et c le prix plancher du vendeur (par exemple c est le coût de revient ou le prix de gros...), le bénéfice de l'acheteur, si la transaction s'effectue au prix p, est égal à $v-p$ et celui du vendeur à $p-c$. Evidemment, chacun ne peut faire un bénéfice positif que lorsque $v \geq c$. Dans ce cas, la valeur créée par la transaction $(v-c)$ est répartie entre les deux acteurs : $v-c = v-p+p-c$.

D'une manière plus générale, une relation économique élémentaire, met en présence deux protagonistes pouvant coopérer pour créer de la valeur. La coopération sera « volontaire » si chacun y trouve son compte, c'est-à-dire, si chacun tire bénéfice de la coopération. La première caractéristique d'un contrat est donc de fixer les règles du partage des fruits de la coopération.

Tout va bien tant que l'information entre les protagonistes est symétrique : si les deux individus connaissent c et v, le seul problème concerne les modalités de partage du surplus. C'est par exemple, une affaire de rapport de « force » dans la négociation. Imaginons une négociation de la forme « c'est à prendre ou à laisser » où l'un des deux fixe ses conditions et l'autre n'a d'autre latitude que d'accepter ou refuser. Lorsque l'information est parfaite, celui qui propose peut s'accaparer l'intégralité du bénéfice de la transaction $v-c$. Evidemment, d'autres formes de négociation sont possibles, dans lesquels les rapports de force sont plus équilibrés. D'une manière générale, quel que soit le mode de négociation, celui-ci aboutit à un partage du bénéfice total de la transaction sans perte d'efficacité.

Lorsque l'information n'est pas symétrique le problème se complique. Le cas simple du vendeur ne connaissant pas exactement le consentement à payer de l'acheteur est éclairant. Supposons que le vendeur n'aie qu'une information « statistique » du consentement à payer de l'acheteur représentée par une fonction de distribution F sur un intervalle $[v_0, v_1]$, avec $v_1 > c$, ($F(v)$ = probabilité que le consentement à payer soit inférieur à v). Dans une négociation simple ou le vendeur propose et l'acheteur dispose, cette déficience d'information engendre une certaine inefficacité. Le vendeur est devant un dilemme : s'il propose un prix bas (proche de v_0), il a de grandes chances de voir son offre acceptée, mais son bénéfice sera faible. S'il propose un prix plus élevé, son bénéfice augmente mais il court le risque de voir sa proposition refusée. L'arbitrage optimal est tel que les deux effets se compensent exactement : il fixe un prix p^* qui maximise $(p-c)(1-F(p))$, c'est-à-dire tel que $(p^*-c)f(p^*) = 1-F(p^*)$. Dès lors que ce prix est supérieur à v_0, il y a une perte d'efficacité : on renonce à des transactions « collectivement profitables » (celles telles que $v_0 = v < p^*$ et $c = v$).

Ici l'information concernait le consentement à payer. On peut imaginer d'autres cas de figures d'asymétrie d'information. Par exemple sur la « qualité » du bien qui peut être connue du seul vendeur. Auquel cas, le vendeur aura tendance à essayer de convaincre l'acheteur que son bien est d'excellente qualité.

Le surplus de la transaction peut par exemple dépendre d'actions, d'effort ou d'ardeur, entrepris par l'un ou les deux protagonistes, ceux-ci pouvant être plus ou moins repérable dans les résultats. La forme du contrat qui répartit les bénéfices de la coopération aura alors une importance radicale en terme d'incitation des parties.

D'une manière générale la théorie des contrats examine les situations dans lesquelles :

- Une transaction mutuellement profitable est *a priori* possible entre deux partenaires,
- Le **bénéfice** individuel et/ou total de cette transaction **dépend cependant d'informations privées** et éventuellement des **comportements** (plus ou moins observables) des parties.

Le tout dans un environnement **aléatoire**.

2.1.2 Exemple introductif

L'exemple suivant est l'exemple emblématique de la théorie des contrats. On considère le marché des voitures d'occasion. On suppose que la qualité d'une telle voiture peut être bonne (B) ou mauvaise (M). Les acheteurs sur ce marché n'ont évidemment pas le même consentement à payer selon la qualité. On a par exemple $v_B = 50$ et $v_M = 30$. Du côté des vendeurs on a aussi une différence des prix plancher $c_B = 40$ et $c_M = 25$. *A priori*, la proportion de voitures de bonne qualité est connue (d'expérience) des deux parties et égale à λ.

	Consentement à payer	Coût	Proportion
B(Bonne qualité)	50	40	λ
M(Mauvaise qualité	30	25	$1-\lambda$

Nous nous mettons dans la situation où le vendeur propose un prix et l'acheteur accepte ou refuse.

Considérons d'abord le cas d'information parfaite, vendeur et acheteur peuvent observer la qualité de la voiture. Tout se passe comme s'il y avait deux marchés. Les prix de la bonne et mauvaise qualité seront respectivement :

$$p_B = v_B = 50 > 40 = c_B \textit{ et } p_M = v_M = 30 > 25 = c_M$$

Sans surprises les transactions sont efficaces.

Plaçons nous dans le cas d'information asymétrique : le vendeur connaît la qualité de la voiture, mais l'acheteur n'a pas les moyens de l'observer. L'acheteur, devant une offre de prix n'a aucune information sur la qualité. Il estime donc qu'il est en face d'une bonne voiture avec probabilité λ et d'une mauvaise avec probabilité $1-\lambda$. Son consentement à payer peut alors être estimé à $v_\lambda = \lambda v_B + (1-\lambda)v_M$ (sous l'hypothèse d'absence d'aversion pour le risque).

Deux cas sont alors possibles :

- $v_\lambda \geq 40$: le consentement à payer est supérieur au coût des bonnes voitures, le vendeur proposera alors $p = v_\lambda$. Si la voiture est de bonne qualité le vendeur fait un bénéfice positif (*a fortiori* si la voiture est de mauvaise qualité). Il en ressort que les deux types de vendeurs ont intérêt à faire cette offre ce qui corrobore le fait que l'on a estimé la probabilité d'être en présence d'une bonne voiture à λ.
- $v_\lambda < 40$: le consentement à payer est inférieur au coût des bonnes voitures. Proposer $p = v_\lambda$ n'est pas intéressant pour les vendeurs de bonnes voitures. Un prix supérieur étant refusé, **il n'est pas possible, à l'équilibre, que la voiture offerte soit de bonne qualité**. L'acheteur le sait, et la stratégie optimale du vendeur (de mauvaise voiture) consiste alors à proposer le prix $p = v_M$.

Ainsi, on voit que lorsque $v_\lambda < 40$, l'asymétrie d'information introduit une inefficacité. On est en présence d'un phénomène **d'anti-sélection** : des transactions n'ont pas lieu, les vendeurs de voitures de bonne qualité se retirent du marché parce que le prix ne peut refléter que la qualité moyenne qui est trop basse pour être fortement valorisée.

On peut aussi avoir des configurations où il y a trop de transactions, c'est le cas si $c_M > 30$ et $v_\lambda > 40$. En information parfaite, il est efficace de ne vendre que les bonnes voitures. En information asymétrique, toutes les voitures sont vendues !

Nous verrons qu'un moyen de lutter contre ce type d'inefficacité consiste à introduire un **signal** de qualité (label, garantie...).

2.1.3 Les trois catégories de modèles

La relation contractuelle entre les deux parties peut être sommairement décrite par deux caractéristiques : le pouvoir de négociation et le type d'information cachée.

- **Pouvoir de négociation, le modèle Principal–Agent**
  Dans les modèles que nous examinons, la répartition du pouvoir de négociation est très simple. L'un des acteurs, que l'on nomme le **Principal** possède le pouvoir de négociation : il propose les modalités de la transaction, l'autre acteur, que l'on nomme **l'Agent**, accepte ou refuse. Ce processus de négociation est relativement rudimentaire. Des processus de négociation plus complexes, dans lesquels chacune des parties pourrait faire propositions et contre-propositions pourraient être imaginés.
- **Type d'information**
  Les modèles de la théorie des contrats distinguent deux types d'information. Elle peut concerner l'information sur **ce que l'autre fait** (action cachée), ou **ce que l'autre est**, (identité cachée).

On a ainsi *a priori* 4 cas de figure, seuls 3 intéressent la théorie des contrats. On parle ainsi de modèle de **signal** lorsque le principal a une information privée sur son identité (son type), On parle de modèle **d'auto-sélection** lorsque l'Agent possède une information privée sur son type, on parle enfin de modèle de **risque moral** lorsque l'agent peut prendre des actions non observées par le principal.

	Principal	Agent
Identité cachée	Signal	Auto-sélection
Action cachée	—	Risque moral

2.2 Auto-sélection

2.2.1 Introduction

Les modèles d'auto-sélection sont ceux les plus connus de la théorie des contrats. Leur popularité tient au fait qu'ils peuvent avoir de multiples applications concrètes dans le domaine du marketing en particulier. Il suffit, en effet d'observer autour de soi la multiplication d'offres tarifaires à la carte, de tarifs non linéaires, où le consommateur choisit la formule qui lui convient le mieux. A quel phénomène économique correspond cette tendance ? Pourquoi s'éloigne-t-on de l'application pure et simple d'un prix unique ? Comment concevoir de manière optimale le bon menu tarifaire ?

Anti-sélection

L'un des exemples les plus éclairants concerne le marché de l'assurance, et en particulier celui de la garantie automobile. Dans ce domaine, l'expérience quotidienne montre que tous les assurés ne sont pas identiques du point de vue du risque : il y a les bons conducteurs, qui n'ont que rarement des accidents et des mauvais qui en ont fréquemment. Bien sûr, le coût pour l'assureur n'est pas le même, et idéalement, il faudrait faire payer des prix (ici des primes) différents à chaque catégorie d'assuré : pour la même garantie, la cotisation est différente. Tout va bien si l'assureur peut repérer le risque, peut distinguer entre les deux types de conducteurs. Tout va bien en particulier s'il existe des « variables observables » qui permettent de « prédire » si le client est bon ou mauvais. Que se passe-t-il sinon ? Que faire dans le cas où les clients sont indiscernables ? Proposer deux contrats **ayant les mêmes garanties** mais l'un étant **moins cher que l'autre** s'avère complètement loufoque : tous les clients vont se précipiter sur le moins cher, comme s'ils étaient tous de très bons conducteurs. Dans le catalogue, un seul contrat est choisi, par les bons comme par les mauvais conducteurs ! L'assureur, qui avait initialement ajusté la prime sur le risque des bons, doit augmenter la cotisation, ce qui peut, en retour, décourager les bons risques de s'assurer ! Le résultat de ce déficit d'information est clair : les bons risques sont moins bien assurés et l'assurance est chère (puisque son prix s'ajuste sur les mauvais). On parle ici **d'anti-sélection ou de sélection contraire (en anglais *adverse selection*)**.

Auto-sélection

Quels instruments sont-ils susceptibles de limiter les effets désastreux de l'anti-sélection ? L'idée de base, pour répondre à cette question, est extrêmement simple : il faut proposer un menu de contrats dans lequel les prix mais **aussi les garanties sont variables**. Imaginons que l'assureur propose deux contrats. Le premier, cher, propose une garantie complète, le second, moins cher, comporte une franchise (coût du sinistre restant à la charge de l'assuré). Le mauvais conducteur, entre ces deux contrats, doit faire un arbitrage qui n'est plus aussi évident que lorsque les garanties étaient identiques. S'il prend le contrat avec franchise, certes moins cher, il court le risque de devoir en être de sa poche très souvent, et ce qu'il gagne en cotisation il le reperd en franchise. Le bon conducteur, lui n'a pas d'hésitation, c'est le moins cher qui lui convient : il n'aura que très peu souvent à payer de sa poche. On comprend dès lors que l'on peut ajuster primes et franchise de manière à obtenir **l'auto-sélection des clients**.

2.2.2 Mécanisme

Schématiquement, la relation économique est celle d'un « principal » qui fait face à un « agent » qui dispose d'une information privilégiée.

Notations : information, transaction

On note $y \in Y$ une transaction (par exemple y est le couple « quantité, facture » $= (q, p)$). L'utilité que l'agent accorde à une transaction y donnée, dépend d'un paramètre θ, « le type », qui caractérise l'intérêt de l'agent pour la transaction. On note $u(\theta, y)$ cette utilité, et Θ l'ensemble des types possibles. Il existe une distribution *a priori* des types, c'est-à-dire une densité de probabilité sur Θ, notée $dF(\theta) = f(\theta)d\theta$.

L'asymétrie d'information concerne le paramètre d'intérêt θ. En information complète, le principal observe θ, son offre ne laisse pas le choix à l'agent entre plusieurs transactions : à chaque θ correspond une transaction donnée, et un agent de type θ ne peut en aucun cas prétendre à une transaction qui serait celle destinée à un agent de type θ'. En information incomplète, le principal qui n'observe pas θ, ne peut compter que sur l'auto-sélection des agents : il va proposer un menu de contrats, laissant l'agent choisir parmi toutes les options proposées. Il existe plusieurs façons équivalentes de représenter de tels menus. Un sous-ensemble quelconque de l'ensemble des transactions est « un menu ». De la même manière, un tarif non linéaire est un menu. Nous présentons ici successivement plusieurs perspectives équivalentes : mécanismes, mécanismes directs révélateurs, tarifs.

Définition : Mécanisme

Soit M un ensemble (appelé espace des messages). Un mécanisme $y(.)$ est une application de M dans Y qui à un message fait correspondre une transaction $y(m)$. L'idée d'un mécanisme est la suivante : le principal propose un mécanisme, l'agent choisit le message m qui lui convient le mieux.

L'espace des « messages » est une notion abstraite qui peut être illustrée de manière concrète de façon très simple. Par exemple, au restaurant chinois, les plats sont repérés par un numéro. Le mécanisme est le suivant : le client donne le numéro (message) de son plat préféré (par exemple le canard laqué, à 7 euros, qui a le numéro 23), le serveur appliquera alors la transaction $y(23) =$ (canard laqué, 7€).

Définition : meilleure réponse

Etant donné un mécanisme $y(.)$, on appelle meilleure réponse l'application (ou correspondance) qui à chaque type θ fait correspondre le message optimal :

$$m^*(\theta) = \arg\max_m u(\theta, y(m))$$

Définition : mécanisme direct

On dit que le mécanisme est direct lorsque $M = \Theta$, l'espace des messages est confondu à l'espace des types.

Principe de révélation

Si l'allocation $\tilde{y}(\theta)$ peut être obtenue par un mécanisme (c'est-à-dire si à l'issue du mécanisme, l'agent de type θ, obtient la transaction $\tilde{y}(\theta)$), elle peut être obtenue par un mécanisme direct dans lequel l'agent a intérêt à répondre la vérité (mécanisme direct révélateur).

Démonstration : Dire que $\tilde{y}(\theta)$ peut être obtenue par le mécanisme $y(.)$ signifie : $\tilde{y}(\theta) = y(m^*(\theta))$. Soit alors le mécanisme direct $y \circ m^*(.)$. Par définition de m^*, la meilleure réponse de l'agent est de répondre la vérité sur son type. En effet, on a :

$$\forall \theta, m \; u(\theta, y \circ m^*(\theta)) = u(\theta, y(m^*(\theta))) \geq u(\theta, y(m))$$

Ceci implique en particulier, $u(\theta, y(m^*(\theta))) \geq u(\theta, y(m^*(\theta'))), \; \forall \theta, \theta'$.

Définition : Tarif

Un tarif est simplement une famille T de transactions y dans Y.

2.2.3 Incitation et participation

Que l'on propose un **mécanisme, un mécanisme direct ou un tarif**, on peut directement noter $\hat{y}(\theta)$ la transaction choisie par l'agent de type θ dans l'offre du principal :

$$\hat{y}(\theta) = y(m^*(\theta)), \; m^*(\theta) = \arg\max_{m \in M} u(\theta, y(m))$$

ou bien alternativement :

$$\hat{y}(\theta), \; \theta = \arg\max_{\theta' \in \Theta} u(\theta, \hat{y}(\theta'))$$

ou bien encore :

$$\hat{y}(\theta) = \arg\max_{y \in T} u(\theta, y)$$

Conditions d'incitation

On a alors, les conditions dites d'incitation (IC) :

$$\forall \theta, \theta' \; u(\theta, \hat{y}(\theta)) \geq u(\theta, \hat{y}(\theta')) \quad (IC_{\theta\theta'})$$

Grace au théorème de l'enveloppe on a (de manière équivalente),
en posant $V(\theta) = u(\theta, \hat{y}(\theta))$:

$$\dot{V}(\theta) \equiv \frac{dV}{d\theta}(\theta) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(\theta, \hat{y}(\theta))$$

Par ailleurs, il est clair que l'agent peut refuser toutes les offres du principal. En cas d'absence de transaction, on note $u_0(\theta)$, le niveau d'utilité que peut atteindre l'agent en dehors de sa relation avec le principal.

Conditions de participation

Pour s'assurer que l'agent acceptera l'offre il est nécessaire d'avoir :

$$\forall \theta, \; u(\theta, y(\theta)) \geq u_0(\theta) \quad (IR_\theta)$$

Le problème du principal est de proposer le mécanisme (ou le tarif T) qui maximise son propre objectif (par exemple son profit). Il doit ainsi confectionner son catalogue de manière à optimiser son objectif.

Problème du principal

Le problème du principal est donc de trouver la fonction $\hat{y}(.)$ qui maximise l'espérance de son objectif sous les contraintes d'incitation et de participation.

$$\max_{\substack{\hat{y}(.) \\ s.c. \begin{cases} u(\theta,\hat{y}(\theta)) \geq u(\theta,\hat{y}(\theta')) & \forall \theta,\theta' \\ u(\theta,\hat{y}(\theta)) \geq u_0(\theta) & \forall \theta \end{cases}}} \mathbb{E}_{\Theta}\pi(\theta, \hat{y}(\theta))$$

2.2.4 Un exemple simple

Considérons par exemple le cas d'une relation entre un vendeur et un acheteur qui porte sur un bien (par exemple une bouteille de vin) dont la qualité peut être variable. On repère par q la qualité (observable et vérifiable) du bien. L'acheteur est caractérisé par son « consentement à payer la qualité ». Pour fixer les idées on suppose que ce consentement est le produit de l'indice de qualité q par un paramètre θ (réel positif). La valeur de θq représente ainsi la somme maximale qu'est prêt à payer un individu de type θ pour une bouteille de qualité q.

On suppose de plus qu'il existe deux types d'acheteurs : $\Theta = \{\theta_B, \theta_H\}$, les « amateurs[1] » (de type θ_B) et les « gourmets » (de type θ_H, $\theta_B < \theta_H$). *A priori* il existe une proportion (ou une probabilité) λ_B d'amateurs et une proportion $\lambda_H = 1 - \lambda_B$ de gourmets.

Pour le vendeur le coût d'une bouteille de qualité q est égal à $C(q)$, fonction croissante convexe avec $C(0) = 0$ (par exemple $C(q) = \frac{q^2}{2}$).

Si le prix de la bouteille est p, on a donc avec les notations précédentes :

$$y \equiv (q, p), \;\; u(\theta, y) \equiv \theta q - p \; et \; \pi(y) \equiv p - C(q)$$

Information complète

Supposons (par extraordinaire, ou par une étude de marché qui corrèle une caractéristique observable à θ), que le vendeur puisse observer θ.

L'offre optimale du principal est alors la solution du problème suivant :

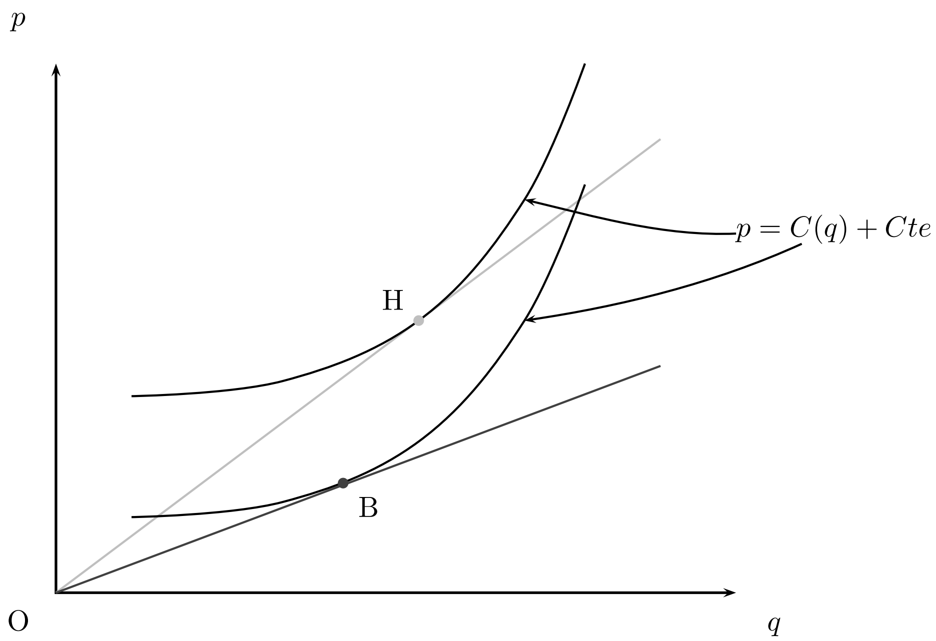
$$\max_{\substack{p_i, q_i \\ s.c. \; \theta_i q_i \geq 0}} \; p_i - C(q_i)$$

C'est-à-dire : $p_i = \theta_i q_i$ avec $q_i = \arg\max \theta_i q_i - C(q_i) = C'^{-1}(\theta_i), \; i = B, H$

La transaction est efficace : c'est celle qui procure le surplus maximal, surplus qui est intégralement capturé par le principal.

Sur le graphique suivant on a représenté en abscisse la qualité et en ordonnée le prix. Les contrats d'information complète sont représentés par les points gris clair (H) et gris foncé (B).

[1] ou nioubis



Remarquons que le surcroît de prix à payer pour passer de la bouteille B à la bouteille H rapporté à l'incrément en qualité (c'est-à-dire la pente du segment qui relie les deux points), sorte de prix incrémental de la qualité, est supérieur à θ_H qui est le prix maximal (par unité de qualité) qu'est prêt à payer le gourmet !

Information Incomplète

Supposons maintenant que le vendeur ne puisse pas observer θ. A-t-il intérêt à offrir le même « catalogue » de produits qu'en information complète ? La réponse est simple. L'acheteur ayant le choix entre les deux bouteilles précédentes préférera, quel que soit son type, la bouteille B ! La bouteille H est relativement trop chère ! Formellement :

$$\theta_H q_H - p_H < \theta_H q_B - p_B$$

La question est de savoir si le principal peut faire mieux. Autrement dit, quel est le catalogue « optimal » que le vendeur doit proposer ?

Imaginons que le principal propose un catalogue donné. L'acheteur choisit dans ce catalogue l'offre qui lui convient le mieux (ce choix pouvant être d'ailleurs de ne rien acheter). Le point essentiel au raisonnement est que le vendeur peut anticiper ce choix. En effet, appelons $(\hat{q}_B, \hat{p}_B)$ la bouteille choisie par B et $(\hat{q}_H, \hat{p}_H)$, celle choisie par H dans ce catalogue (éventuellement $q_i = p_i = 0$). On a, par définition :

$$\begin{cases} \theta_B \hat{q}_B - \hat{p}_B \geq \theta_B \hat{q}_H - \hat{p}_H & IC_{BH} \\ \theta_H \hat{q}_H - \hat{p}_H \geq \theta_H \hat{q}_B - \hat{p}_B & IC_{HB} \end{cases}$$

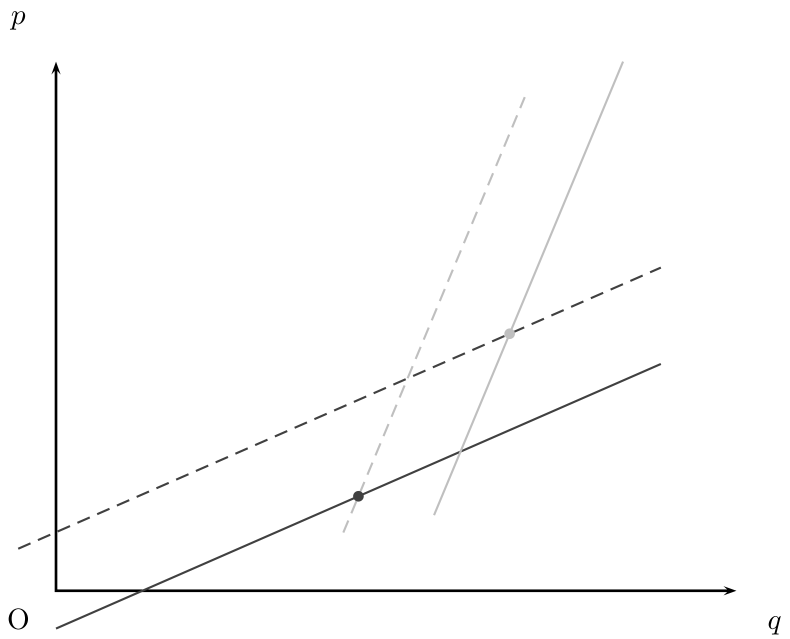
Ces inégalités expriment simplement que dans le catalogue réduit à deux bouteilles, H préfère la bouteille H et B préfère la bouteille B ! (IC est l'acronyme correspondant à l'anglais « *incentive compatibility* »).

Par ailleurs on a évidemment :

$$\begin{cases} \theta_B\hat{q}_B - \hat{p}_B \geq 0 & IR_B \\ \theta_H\hat{q}_H - \hat{p}_H \geq 0 & IR_H \end{cases}$$

Ces inégalités exprimant, elles, le fait que la bouteille choisie ne peut pas procurer une satisfaction inférieure à celle de l'absence d'achat (IR correspond à « individual rationality »).

Sur le graphique suivant on a représenté un catalogue vérifiant ces 4 inégalités. La satisfaction croît lorsqu'on se déplace vers le Sud Est (bouteille de meilleure qualité pour moins cher !), les droites gris clair et gris foncé correspondent à des bouteilles indifférentes pour le type H et le type B.



A ce point du raisonnement, on peut remarquer que le vendeur peut se contenter d'offrir un catalogue ne comprenant que deux types de bouteilles.

Le problème du principal est alors très simple : trouver $(\hat{q}_B, \hat{p}_B)$ et $(\hat{q}_H, \hat{p}_H)$ qui maximisent l'espérance de bénéfice, sachant que l'offre doit satisfaire les 4 inégalités précédentes :

$$\max_{(\hat{p},\hat{q})} \quad \lambda_B(\hat{p}_B - C(\hat{q}_B)) + \lambda_H(\hat{p}_H - C(\hat{q}_H))$$

$$s.c. \begin{cases} \theta_B\hat{q}_B - \hat{p}_B \geq \theta_B\hat{q}_H - \hat{p}_H & IC_{BH} \\ \theta_H\hat{q}_H - \hat{p}_H \geq \theta_H\hat{q}_B - \hat{p}_B & IC_{HB} \\ \theta_B\hat{q}_B - \hat{p}_B \geq 0 & IR_B \\ \theta_H\hat{q}_H - \hat{p}_H \geq 0 & IR_H \end{cases}$$

Ce problème peut être facilement résolu moyennant plusieurs remarques :

– **Remarque 1** :le catalogue optimal, s'il existe est tel que $\theta_B\hat{q}_B - \hat{p}_B = 0$.
En effet, sinon on aurait :

$$\begin{aligned} & \theta_H\hat{q}_H - \hat{p}_H \geq \theta_H\hat{q}_B - \hat{p}_B \geq \theta_B\hat{q}_B - \hat{p}_B > 0 \\ et \quad & \theta_B\hat{q}_B - \hat{p}_B \geq \theta_B\hat{q}_H - \hat{p}_H \end{aligned}$$

Le principal pourrait augmenter simultanément les deux prix d'un montant strictement positif inférieur à $\theta_B\hat{q}_B - \hat{p}_B$, tout en satisfaisant l'ensemble des inégalités.

– **Remarque 2** : Si $\lambda_H > 0$, le catalogue optimal s'il existe est tel que $\theta_H \hat{q}_H - \hat{p}_H = \theta_H \hat{q}_B - \hat{p}_B$. En effet, sinon on aurait :

$$\begin{array}{rl} & \theta_H \hat{q}_H - \hat{p}_H > \theta_H \hat{q}_B - \hat{p}_B \geq \theta_B \hat{q}_B - \hat{p}_B = 0 \\ et & \theta_B \hat{q}_B - \hat{p}_B \geq \theta_B \hat{q}_H - \hat{p}_H \end{array}$$

Le principal pourrait augmenter p_H d'un montant strictement positif tout en satisfaisant l'ensemble des inégalités.

– **Remarque 3** : le catalogue optimal s'il existe est tel que $\hat{q}_H \geq \hat{q}_B$. En effet, il suffit d'ajouter membre à membre les inégalités IC pour obtenir :

$$(\theta_H - \theta_B)(\hat{q}_H - \hat{q}_B) \geq 0$$

– **Remarque 4** : Compte tenu des remarques précédentes,

$$\{IC_{HB}, IR_B, q_H \geq q_B\} \Rightarrow \{IC_{BH}, IR_H\}$$

En effet la remarque 2 permet d'écrire :

$$\theta_B \hat{q}_B - \hat{p}_B = \theta_B \hat{q}_B + \theta_H \hat{q}_H - \theta_H \hat{q}_B - \hat{p}_H$$

Et donc, en utilisant la remarque 3 :

$$\theta_B \hat{q}_B - \hat{p}_B = \underbrace{(\theta_H - \theta_B)(\hat{q}_H - \hat{q}_B)}_{\geq 0} + \theta_B \hat{q}_H - \hat{p}_H \geq \theta_B \hat{q}_H - \hat{p}_H$$

De même :

$$\theta_H \hat{q}_H - \hat{p}_H = \theta_H \hat{q}_B - \hat{p}_B \geq \theta_B \hat{q}_B - \hat{p}_B = 0$$

On en déduit que le problème du principal peut être réécrit :

Problème réduit

$$\max_{(\hat{p},\hat{q})} \quad \lambda_B(\hat{p}_B - C(\hat{q}_B)) + \lambda_H(\hat{p}_H - C(\hat{q}_H))$$

$$s.c. \begin{cases} \theta_H \hat{q}_H - \hat{p}_H = \theta_H \hat{q}_B - \hat{p}_B & IC_{HB} \\ \theta_B \hat{q}_B - \hat{p}_B = 0 & IR_B \\ \hat{q}_B \geq \hat{q}_H \end{cases}$$

Soit encore :

$$\max_{\substack{(\hat{q}_i) \\ s.c.\{\hat{q}_B \geq \hat{q}_H}} \quad \lambda_B(\theta_B \hat{q}_B - C(\hat{q}_B)) + \lambda_H(\theta_H \hat{q}_H - \theta_H \hat{q}_B - C(\hat{q}_H))$$

$$\hat{p}_H = \theta_H \hat{q}_H - \theta_H \hat{q}_B + \theta_B \hat{q}_B$$
$$\hat{p}_B = \theta_B \hat{q}_B$$

On peut réécrire le programme déterminant $(\hat{q}_i)$:

$$\max_{\substack{(\hat{q}_i) \\ s.c.\{\hat{q}_B \leq \hat{q}_H}} \quad \lambda_B(\theta_B \hat{q}_B - C(\hat{q}_B)) - \lambda_H(\theta_H - \theta_B)\hat{q}_B + \lambda_H(\theta_H \hat{q}_H - C(\hat{q}_H))$$

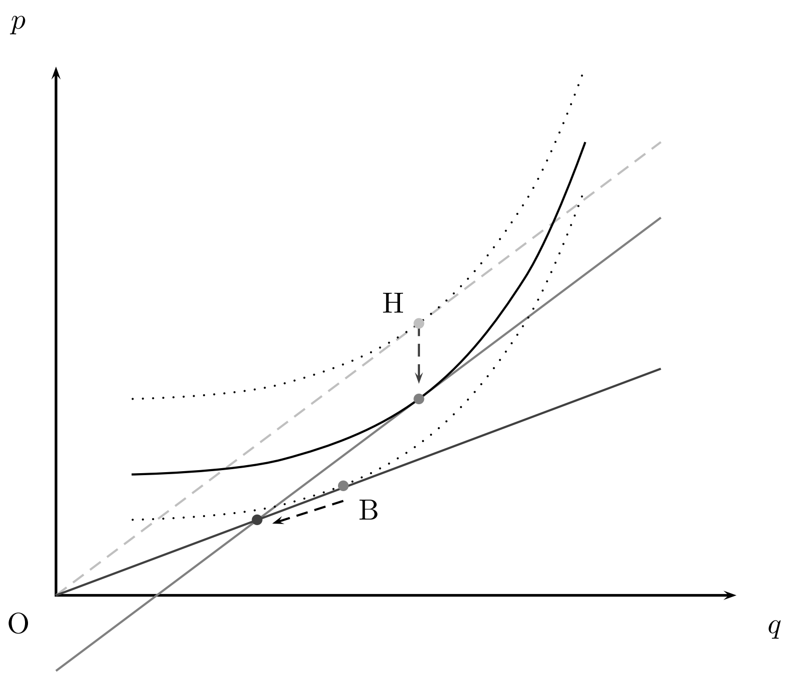
Les conditions du premier ordre de ce programme (en ignorant l'inégalité) donnent :

$$\begin{cases} \theta_B - \frac{\lambda_H}{\lambda_B}(\theta_H - \theta_B) = C'(\hat{q}_B) \\ \theta_H = C'(\hat{q}_H) \end{cases}$$

Alors qu'en information complète nous avions :

$$\begin{cases} \theta_B = C'(q_B) \\ \theta_H = C'(q_H) \end{cases}$$

Plusieurs remarques doivent être faites :
- La qualité de la bouteille H est la même qu'en information complète. En revanche son prix est plus faible. On dit que l'asymétrie d'information **n'introduit pas de distorsion (de qualité) en « haut »** (*no distorsion on the top*).
- La qualité de la bouteille B est, quant à elle, dégradée par rapport au cas d'information complète.
- Quand la proportion de H est suffisamment élevée $\frac{\lambda_H}{\lambda_B} \geq \frac{\theta_B}{\theta_H - \theta_B}$, le principal peut avoir intérêt à ne proposer qu'une catégorie de bouteille : on dit qu'il pratique **l'écrémage**.
- L'acheteur de type H obtient un surplus strictement positif (sauf lorsqu'il y a écrémage) : c'est ce qu'on appelle **la rente informationnelle**.



2.3 Le risque moral

On se propose d'évoquer le risque moral à travers deux situations :
- les relations employeurs, employés
- assureur, assuré

On considère ici un propriétaire terrien et un travailleur agricole. Un *deal* est donc possible entre eux.

On suppose que la récolte annuelle dépend de :
- l'ardeur au travail du travailleur
- les conditions de météorologie (représentant les aléas)

Imaginons que le patron est le propriétaire. Si la récolte est mauvaise cette année, le travailleur va lui dire que c'est à cause des aléas météorologiques. Une telle assertion n'est pas vérifiable. Dans ces conditions, le contrat a une grande importance.

Si l'intégralité du risque est transférée au travailleur, le propriétaire loue la terre et touche un montant fixe. C'est alors le travailleur qui a entre ses mains son revenu : un fois le fixe donné, le travailleur est créancier résiduel. Il a alors un comportement optimal. On dit que le propriétaire a vendu l'entreprise au travailleur. En contrepartie, c'est le travailleur qui subit l'intégralité du risque.

Autre cas de figure : cas polaire. C'est le travailleur qui reçoit un salaire fixe. En contrepartie, la récolte appartient au propriétaire. C'est donc ce dernier qui prend tout le risque. Dans ce cas, l'incitation à l'effort est faible.

Dans le marché de l'assurance, si un assuré est remboursé complètement, il n'a pas intérêt strict à éviter l'accident. D'où la nécessité de responsabiliser l'assuré.

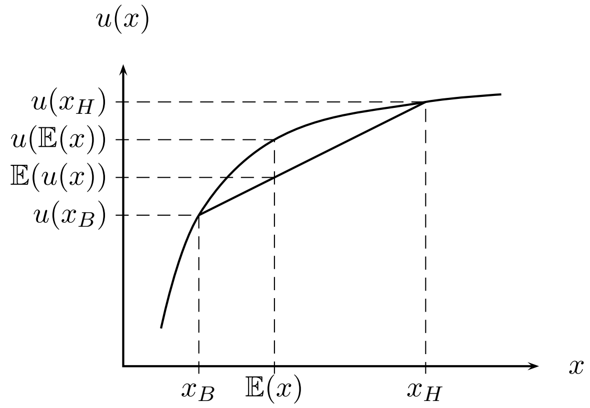
2.3.1 Modèle de base de risque moral

- l'agent a un certain nombre d'actions qui correspondent à des efforts $\{e_1, \dots e_n\}$
- il y a des résultats $\{x_1, \dots x_n\}$
- on note p_{ij} la probabilité pour qu'on obtienne le résultat j suite à l'action i
- chaque action a un coût c_i = coût de l'effort
- ω_j = rémunération de l'agent si le résultat est x_j

$$\begin{array}{rll} \text{Agent :} & \text{recettes } \omega_j, & \text{dépenses } c_i \\ \text{Principal :} & \text{recettes } x_j, & \text{dépenses } \omega_j \end{array}$$

On suppose que l'agent est averse au risque, c'est-à-dire qu'il valorise l'espérance d'une fonction concave de son salaire.

Rappel



Ainsi l'aversion au risque équivaut à $u(\mathbb{E}(x)) > \mathbb{E}(u(x))$ pour une fonction concave.

L'agent gagne $\sum_j p_{ij} u(\omega_j) - c_i$ s'il fait l'effort i.
Le principal gagne $\sum_j p_{ij}(x_j - \omega_j)$ si l'agent fait l'effort i.

Ecrivons le programme du principal :

$$\max_{i,\omega} \sum_j p_{ij}(x_j - \omega_j)$$

$$s.c. \begin{cases} \forall k \neq i,\ \sum_j p_{ij} u(\omega_j) - c_i \geq \sum_j p_{kj} u(\omega_j) - c_k & (\lambda_k) \\ \sum_j p_{ij} u(\omega_j) - c_i \geq \bar{u} & (\mu) \end{cases}$$

La première contrainte assure que l'agent va choisir de faire l'effort i, optimal pour lui. La seconde assure que l'agent ne va pas aller à la concurrence où il récolterait une utilité $\bar{u}$ donnée. On a noté (λ_k) et (μ) les multiplicateurs de Lagrange associés à ces contraintes.

Le principal cherche l'effort i qui l'avantage le plus. Supposons que la solution en i soit i^*. On écrit les conditions du premier ordre :

$$\frac{\partial L}{\partial \omega_j} = -p_{ij} + \sum_k \lambda_k (p_{ij} - pkj) u'(\omega_j) + \mu p_{ij} u'(\omega_j) = 0$$

soit :

$$\frac{1}{u'(\omega_j)} = \mu + \sum_{k \neq i} \lambda_k \left(1 - \frac{p_{kj}}{p_{ij}}\right)$$

Si $\forall k,\ \frac{p_{kj}}{p_{ij}} \leq 1$, alors i maximise la vraisemblance.

On suppose : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$. A quelle condition ω_j est-elle croissante ?

u concave $\Leftrightarrow u' \downarrow \Leftrightarrow \frac{1}{u'} \uparrow$. On fait alors l'hypothèse suivante, dite de monotonie des ratios de vraisemblance :

$$\forall k < i,\ \forall l < j,\ \frac{p_{ij}}{p_{il}} \geq \frac{p_{kj}}{p_{kl}}$$

... et on a croissance du salaire avec le résultat, dès lors que $\lambda_k = 0$ quand $k > i^*$ (*id est* la contrainte d'incitation est « faire au moins l'effort i^* »). En fait, l'hypothèse ci-dessus signifie que le résultat est d'autant plus élevé que l'effort est élevé.

2.3.2 Un autre modèle

- continuum d'effort $e \in [0, +\infty[$, $c(e) = \frac{1}{2}e^2$
- résultat : $x = e + \epsilon$, $\epsilon \rightsquigarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$
- $\omega = s + \lambda x,\ \lambda \in [0, 1]$
- fonction d'utilité CARA[2] $u(t) = -e^{-\rho t}$

$\rho =$ aversion au risque $= -\frac{u''}{u'}$.

$$\mathbb{E}[u \underbrace{(s + \lambda(e + \epsilon) - \frac{1}{2}e^2)}_{\rightsquigarrow \mathcal{N}(s + \lambda e - \frac{1}{2}e^2, \lambda^2\sigma^2)}] = \text{espérance de l'utilité du revenu si je fais l'effort } e$$

puisque :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\rho t} \cdot e^{-\frac{(t-m)^2}{2\Sigma^2}} dt = u(m - \frac{1}{2}\rho\Sigma^2) = u(s + \lambda e - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\rho\lambda^2\sigma^2)$$

Fixe extérieur $= s_0$

$$\max_{(\lambda, s)} \qquad \mathbb{E}[(1 - s)(e + \epsilon) - s] = (1 - \lambda)e - s$$

$$s.c. \begin{cases} e = \lambda & (IC) \\ s + \lambda e - \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2}\rho\lambda^2\sigma^2 & (IR) \end{cases}$$

$$((IC)\ et\ (IR)) \Rightarrow s + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{2}\rho\lambda^2\sigma^2 - s_0 \geq 0$$

[2] *Constant Absolute Risk Aversion*

$$\max_{\lambda}[(1-\lambda)\lambda+\frac{1}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\rho\lambda^2\sigma^2-s_0]$$

La condition du premier ordre s'écrit :

$$1-2\lambda+\lambda-\rho\lambda\sigma^2=0 \Leftrightarrow \lambda=\frac{1}{1+\rho\sigma^2}$$

$$\begin{array}{rcl} \rho=0 & \Leftrightarrow & \text{salarié non averse au risque} \\ & \Leftrightarrow & \text{on doit lui conférer l'intégralité du risque} \\ & \Leftrightarrow & \lambda=1 \end{array}$$

Notons que plus ρ est élevé, plus λ est petit, *id est*, plus l'individu est averse au risque, moins on lui donne de salaire variable, et moins on l'incite donc à produire des efforts.

2.3.3 Un dernier modèle : un marché d'assurances

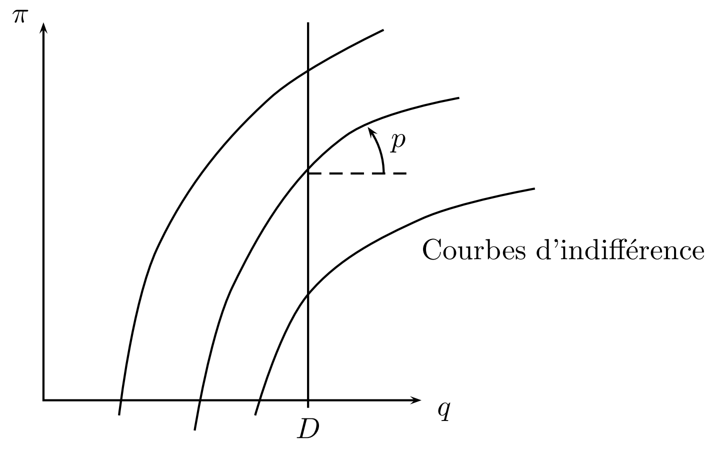
On a des individus identiques, qui touchent R avec la probabilité p et $R-D$ avec la probabilité $1-p$.

$$R \begin{array}{lll} \nearrow & R-D & (p) \\ \searrow & R & (1-p) \end{array}$$

On note $Z=(\pi,q)$, le contrat où π et q représentent respectivement la prime d'assurance et l'indemnité de remboursement ou couverture voire même prestation. De prime abord, $q \leq D$.

Espérance d'utilité :

$$V(p,Z)=p\ u(\underbrace{R-D+q-\pi}_{A})+(1-p)\ u(\underbrace{R-\pi}_{N})$$



$\dfrac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial \pi}}$ = consentement marginal à payer 1€ de couverture en plus (i.e. combien je suis prêt à payer pour être mieux assuré).

$$-\frac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial \pi}}=+\frac{pu'(A)}{pu'(A)+(1-p)u'(N)}$$

Quand $q<D$, comme u est concave (et donc $A<N$), $u'(A)>u'(N)$ et on a : $-\dfrac{\frac{\partial V}{\partial q}}{\frac{\partial V}{\partial \pi}} \geq p$

Ainsi, l'activité d'assurance est bénéfique : le consentement à payer 1€ de plus est plus grand que le coût pour la compagnie d'assurance.

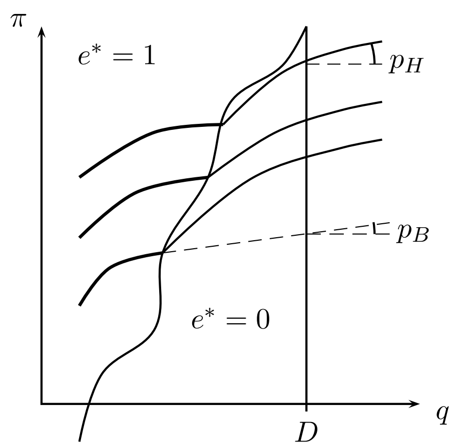
On suppose qu'il y a deux niveaux d'effort : $e \in \{0, 1\}$

		coût :
$\rightarrow$ si $e = 0$	p_H	0 (effort nul)
	$\vee$	
$\rightarrow$ si $e = 1$	p_B	c (effort non nul)

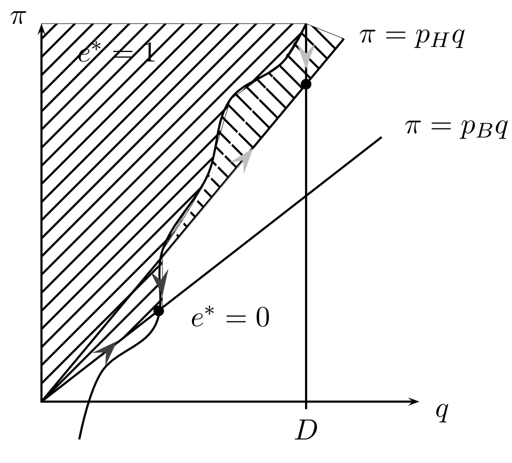
On a :

$$V(e, Z) = p(e) \cdot u(R - \pi + q - D) + (1 - p(e)) \cdot u(R - \pi) - c \cdot e$$

$$\begin{cases} V(Z) = \max\limits_{e} V(e, Z) \\ e^*(Z) = \arg\max\limits_{e} V(e, Z) \end{cases}$$



Quand on est proche de D, on ne fait pas d'effort. Les courbes d'indifférence n'ont donc plus la forme habituelle.



Frontière des réalisables. L'utilité de ceux qui ne font pas d'effort évolue selon les flèches grises foncé ; celle des bons conducteurs évolue selon les flèches grises clair. Les deux points de convergences sont donc candidats à l'optimum.

$$\frac{c}{p_H - p_B} = \text{ coût rapporté au gain en proba}$$

2.4 Modèle de signal

Le principal dispose d'une information cachée. Il va essayer de jouer une stratégie qui va permettre à l'agent de connaître son identité (*id est*, par exemple, savoir si le vendeur, le principal, vend une voiture de bonne ou mauvaise qualité).

	v	c	proba
B	50	40	π
M	30	25	$1-\pi$

On note q la qualité et α le coût de certification de garantie, $\alpha < 1$

Le problème des vendeurs de B est de se signaler, sachant que les deux vendeurs ont intérêt à faire croire que leur voiture est de bonne qualité. Comment dans ce cas, faire en sorte que le vendeur de B soit cru ?

A l'équilibre (Bayésien parfait), les vendeurs de B ne vont pas jouer la même stratégie que les vendeurs M. Précisément, les vendeurs de B doivent adopter une stratégie suicidaire si elle était adoptée par une vendeur de M.

Prix : $p_B = 50$; $p_M = 30$; Niveaux de certification : q_B ; $q_M = 0$.

On doit avoir :

$$\begin{cases} p_B - 40 - \alpha q_B \geq p_M - 40 \Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2} \\ p_M - 25 \geq p_B - 25 - q_B \Leftrightarrow q_B \geq 20 \end{cases}$$

On prend donc q_B=20. On a donc un équilibre bayésien parfait et c'est le moins coûteux pour se signaler. « Si j'étais vendeur de M, je n'aurais aucun intérêt à faire ceci. Je suis donc un vendeur de B ».

Chapitre 3

Economie Publique

3.1 Généralités

L'objet de ce cours est d'examiner les justifications, les modalités et les instruments de l'intervention publique dans l'activité économique.

Parler d'intervention publique, et donc de puissance publique chargée de la mettre en œuvre, suppose qu'existe un « l'intérêt collectif » qui n'émergerait pas spontanément de la seule juxtaposition des intérêts particuliers.

La définition même de la notion d'intérêt collectif n'est pas simple. Nous ne prétendons pas ici élaborer une théorie de l'Etat qui nous permettrait de donner un sens précis à ce que l'on appelle intérêt collectif. Nous nous en tiendrons ici à deux types d'exigence qui pourraient s'interpréter comme des attributs inhérents à la volonté collective ou au contrat social. La première est l'exigence d'efficacité : une organisation qui génère des gaspillages n'est pas satisfaisante du point de vue collectif. La seconde fait référence à l'équité et implique que l'un des rôles de l'Etat est d'assurer une certaine redistribution propre à gommer les « injustices naturelles ».

3.1.1 Restaurer l'efficacité

Pour l'économiste, le marché est le lieu privilégié de la coordination des intérêts particuliers, et, dans un marché parfait, le miracle de la main invisible fait que le résultat du marché est efficace au sens de Pareto : il est l'aboutissement d'actes volontaires (et donc individuellement rationnels) et aucune transaction supplémentaire ne peut améliorer le bien être d'un acteur sans détériorer celle d'un autre. On ne reviendra pas dans ce cours sur les formalisations de la concurrence qui permettent de dériver ce résultat fondamental. Nous nous attacherons au contraire à étudier les situations où justement le marché ne donne pas satisfaction. Si l'on réduit la notion d'intérêt collectif à l'exigence minimale d'efficacité au sens de Pareto, alors une première justification de l'intervention publique se manifeste lorsque le marché fonctionne « mal », qu'il n'est pas parfait ou qu'il aboutit à des états inefficaces dans lesquels subsistent des possibilités d'amélioration du bien être des agents. L'intervention publique aurait alors pour seul objectif de restaurer autant que possible l'efficacité économique.

Les insuffisances du marché

Si le résultat du marché peut être inefficace, c'est que certaines conditions ne sont pas réalisées. Deux hypothèses sont fondamentales pour assurer, au moins théoriquement l'efficacité du marché.

La première stipule que les biens économiques (biens de consommation, services...) sont des biens de consommation privés : la même unité physique d'un bien ne peut être consommée simultanément par deux individus ; si l'un la consomme, il en prive irrémédiablement l'autre. C'est cette rivalité, associée à la rareté, qui est au cœur du fonctionnement du marché. Déterminer qui de deux agents consommera l'unité en question peut se résoudre de façon efficace par le marché : celui qui est prêt à le payer plus cher doit le recevoir et cette allocation est bien efficace puisqu'à ce prix l'autre préfère conserver son argent. Il existe pourtant des biens qui ne satisfont pas cette caractéristique de rivalité : la même unité peut être consommée simultanément (ou presque) par deux individus différents. Ce sont les biens collectifs, c'est-à-dire les biens qui profitent simultanément à tous les individus d'une collectivité. Le phare que l'on construit à l'entrée d'un port pour en baliser le chenal profite à tous les navigateurs qui à un instant donné auraient besoin de se repérer pour accoster.

Le marché ne règle pas facilement le problème associé à la production et au financement des biens collectifs. Nous verrons dans le chapitre 1 qu'il faudrait pour cela créer autant de biens qu'il y a de consommateurs de ce bien. Dans l'exemple du phare le commissaire priseur devrait fixer un prix pour chaque usager et faire varier ce système de prix individuels jusqu'à l'égalisation de l'offre et de la demande. Sur le marché de chaque pseudo-bien le consommateur (c'est-à-dire l'usager potentiel) serait alors seul demandeur potentiel, et donc en concurrence réelle avec personne, ce qui ne l'incite pas vraiment à réagir de façon sincère au prix proposé par le commissaire priseur.

Cette hypothèse d'absence de bien public est liée à celle de l'absence d'effets externes. On dit qu'il y a effet externe lorsque l'action de consommation ou de production d'un individu a une incidence sur le bien-être d'un autre sans que cette interaction ne fasse l'objet d'une transaction économique. La pollution est un effet externe négatif évident : en produisant, une usine peut déverser dans la nature des produits polluants qui affectent l'état de santé et donc le bien-être des populations environnantes. Là aussi, le marché règle difficilement le problème, d'autant qu'en général une externalité peut se doubler d'un phénomène de « bien » ou de mal collectif.

La deuxième hypothèse concerne non plus les biens mais le fonctionnement du marché : en concurrence parfaite chaque individu réagit de façon non stratégique devant le système de prix. Selon cette hypothèse, les agent n'anticipent pas ce que leur décision peut avoir une incidence sur la variation des prix : aux prix en vigueur ils se portent offreurs ou demandeurs sur les marchés, au mieux de leur intérêt immédiat, et le système de prix s'ajuste jusqu'à ce que les offres et demandes soient compatibles. Cette hypothèse est souvent acceptable lorsque chaque individu est « petit » devant le marché, au sens ou il sait que son action n'a que peu d'influence sur les prix. En revanche, dès que le nombre d'individus sur un marché donné se réduit, les comportements stratégiques (grossièrement parlant les comportements susceptibles de manipuler les prix) peuvent apparaître ; et on parle alors de concurrence imparfaite.

Dans ces conditions apparaissent des rentes stratégiques qui limitent l'efficacité du marché.

3.1.2 Les instruments pour favoriser l'efficacité

Les instruments dont la puissance publique dispose pour pallier les insuffisances du marché sont évidemment multiples. D'après ce qui précède on pressent que l'action publique sera différente selon qu'il s'agit d'assurer la production efficace de bien public, de gérer les externalités, ou de minimiser les effets néfastes de la concurrence imparfaite. Si l'Etat se préoccupe de l'insuffisance de concurrence dans tel ou tel secteur, alors il prendra des mesures susceptibles de la favoriser, ou imposera une réglementation en matière de tarification. Il peut, dans le cas des externalités, créer de nouveaux marchés (de droit à polluer par exemple) dont l'objectif consiste à associer une transaction marchande à l'acte de pollution. Il pourra intervenir sur les prix par des mesures de taxation indirecte sur les produits dont les prix ne reflètent qu'imparfaitement le coût social de production. Il pourra enfin produire directement, ou déléguer la production de certains biens ou services ayant des caractéristiques de bien public.

On voit là que de multiples instruments sont envisageables. Le rôle de l'économiste consiste à les comparer et à proposer les instruments les mieux adaptés au problème soulevé. Il doit pouvoir contribuer, par exemple, à la réponse aux questions suivantes :

– L'accès à un bien public doit-il être gratuit, ou doit-on demander une contribution à l'usager ?
– Faut-il autoriser la différenciation tarifaire pour les biens publics ?
– Faut-il subventionner la dépollution, taxer la pollution, émettre des droits à polluer, taxer la consommation de produits générateurs de pollution... ?
– Faut-il réglementer les prix des monopoles, faut-il au contraire libéraliser en favorisant la concurrence ?

3.1.3 Redistribuer

Il existe cependant une deuxième justification à l'intervention publique, c'est celle qui fait référence à l'objectif de redistribution. Même si le marché est efficace, rien ne dit qu'il permette de réaliser un état « souhaitable » du point de vue de l'équité, dans lequel, par exemple, chaque citoyen soit assuré d'un niveau de vie minimal.

La définition de ce que l'on peut appeler « équité » est souvent délicate et objet de nombreux débats. Schématiquement deux approches sont possible pour définir le degré de « désirabilité » d'une répartition du bien être dans une collectivité. Un approche normative qui définit une fonction de bien-être collectif comme somme pondérée des bien-être individuels. Dans ce cas la pondération indique l'intérêt relatif que « la collectivité » porte à telle ou telle catégorie de la population. En fonction de la pondération la volonté collective de redistribution sera ainsi plus ou moins forte. La seconde approche est plus positive et se pose la question de la stabilité politique de telle ou telle mesure redistributrice. Ici la fonction de bien-être social est en quelque sorte endogène et la volonté redistributrice obéit à une nécessité qui peut s'apparenter à un impératif « électoral ».

Une manifestation de cet objectif de redistribution est par exemple la lutte contre l'exclusion. D'une manière un peu caricaturale on peut dire que le marché ne se préoccupe pas de redistribution : le marché entérine les inégalités initiales et rien ne garantit qu'il évite l'exclusion, c'est-à-dire le fait qu'une partie de la population ne puisse avoir accès à la consommation de biens nécessaires à l'existence[1].

Les instruments de redistribution

Dans la réalité les instruments utilisés par la puissance publique pour satisfaire l'objectif de redistribution sont variés. Bien sûr, la fiscalité du revenu et en particulier la forme de son barème, est l'instrument le plus évident puisqu'il permet de moduler les contributions de chacun au budget de la collectivité. Les dispositifs d'allocation de revenu minimum, et la forme du barème d'imposition sur le revenu traduisent ainsi les objectifs redistributifs de l'Etat. Il existe d'autres instruments redistributifs qui peuvent être utilisés par la puissance publique. En particulier, la lutte contre l'exclusion justifie (au moins empiriquement) une redistribution ciblée sur certains bien ou services qui appartiennent à la sphère dite de « service public ».

[1] Cette lutte contre l'exclusion pourrait d'ailleurs être rattachée à un objectif d'efficacité si l'on suppose que la pauvreté a des effets externes forts en matière de cohésion sociale (délinquance, santé publique...).

Bien que la définition fasse l'objet de débats sémantiques, il existe un consensus à peu près stable pour dire qu'un bien relève du service public lorsque sa consommation est une condition nécessaire à l'exercice des droits fondamentaux de l'individu. « La liberté, comprise de manière positive, dépend de la capacité de l'individu à fonctionner, et elle confère de ce fait une valeur particulière à l'accès à certains biens spécifiques dans la mesure où ils conditionnent cette capacité ». Selon cette définition, il existe des biens ou services qui sont intrinsèquement nécessaire à l'exercice de la liberté individuelle, et que l'accès à ces biens doit pouvoir être garanti à chacun. Si l'on juge que le marché, sur un bien de ce type, y pourvoie de manière satisfaisante alors il n'existe aucune raison de transformer cet impératif en mission de service public. Par exemple, il semblerait pour le moins ridicule, dans l'état actuel des choses, de mettre en place un service public de boulangerie.

Là encore les modalités de l'intervention publique sont diverses : production pure et simple de ce type de services, réglementation de leur prix, subventions, allocations en nature...

Comme dans la section précédente, l'économiste doit pouvoir donner un éclairage précis sur certaines interrogations fondamentales :

– Faut-il limiter l'instrument à la redistribution fiscale (impôt sur le revenu et allocations) ou doit-on intervenir sur le prix et même la production de biens ou services pour les subventionner ou au contraire taxer ?
– Doit-on préférer les barèmes d'impôt à taux marginal croissant ou au contraire favoriser les barèmes d'impôt affines ou à taux marginal décroissant ?

La réponse aux quelques questions esquissées plus haut dépend fondamentalement de la puissance comparée des différents instruments dont la puissance publique dispose. En fait cette « puissance » est intrinsèquement liée à l'information dont dispose l'Etat sur les caractéristiques individuelles.

3.1.4 Premier et second rang

Théoriquement, si la puissance publique possède une information complète sur l'environnement économique, les deux objectifs d'efficacité et de redistribution peuvent être atteints simultanément. Il suffit pour cela que le planificateur omniscient calcule le bon système de prix et redistribue les ressources initiales selon la clé désirée. D'une certaine manière, son information étant complète, le planificateur dispose d'instruments infiniment puissants : chaque individu, ou chaque entreprise peut faire l'objet d'un barème d'imposition ad hoc « personnalisé » qui garantit simultanément la prise en compte efficace des biens publics, des externalités, et qui réponde à la volonté de redistribution ! Cette configuration illusoire fait référence à l'optimalité Paretienne : c'est l'allocation qui maximise une certaine fonction de bien-être social (objectif redistributif), sous contrainte de faisabilité. On y fera référence par le terme « optimalité de premier rang ».

Dans la réalité, l'information de la puissance publique est incomplète. Par contrecoup ses instruments sont limités. Prenons par exemple le cas du phare évoqué plus haut. On voit facilement qu'il est « efficace » de le construire si la somme des bénéfices que chacun des usagers potentiels en retire est supérieure au coût. Ainsi le premier rang requiert que l'on fasse payer à chacun un prix qui ne soit pas supérieur à son consentement à payer, ce qui dans certains cas impose de pratiquer un prix différent d'un individu à l'autre. Sans information sur le consentement individuel à payer (que chacun a intérêt à dissimuler), cette façon de faire est impraticable.

Cette contrainte informationnelle, qui limite les instruments, a une incidence importance sur les modalités et l'efficacité de l'intervention publique. D'une manière générale, l'asymétrie d'information introduit une imperfection qui limite l'efficacité de l'instrument. Pour faire en sorte que tel ou tel agent aie tel ou tel comportement souhaitable il faudra l'y inciter et, en règle générale, lui accorder une rente qui limite l'efficacité. On appellera second rang les états accessibles et efficaces compte tenu des contraintes d'incitation et d'information. Par ailleurs, les deux objectifs d'efficacité et de redistribution ne sont alors plus indépendants : un instrument pour améliorer l'efficacité en matière de bien public ou d'externalité aura simultanément des effets redistributifs. De même, la mise en place d'un système fiscal de redistribution pourra engendrer des pertes d'efficacité en introduisant des incitations contraires. Cette interdépendance exige alors un arbitrage clair entre efficacité et redistribution, arbitrage qui traduit les limites de l'action publique en matière économique.

3.2 Préférences individuelles et choix collectif

3.2.1 Introduction

L'objet essentiel de « l'économie » est la gestion des ressources. La science économique étudie de façon descriptive (ou « positive ») mais aussi de façon normative les procédures qui conduisent à la répartition des ressources entre les membres d'une société. D'un point de vue théorique, une des premières missions de l'économie est de mettre en évidence les procédures d'allocation ou de répartition « optimales » : existe-t-il des procédures plus désirables que d'autres pour distribuer (et produire) des biens ? Comment sont elles définies ? Peut on déduire de cette étude des recommandations opérationnelles en termes d'organisation économique ?

L'objectif de ce chapitre est l'étude du problème de base de l'économie : peut on, à partir de préférences individuelles nécessairement conflictuelles, aboutir à des choix collectifs rationnels.

Données du problème :

On suppose qu'il existe un ensemble A de décisions collectives. L'ensemble A représente ainsi l'ensemble des options sur lequel la société doit décider. A pourra par exemple représenter l'ensemble des différentes façons de distribuer des ressources aux membres d'une société. Chaque individu de la société a bien sûr une idée du meilleur choix pour lui parmi toutes les options de l'ensemble A. Il n'y a aucune raison *a priori* d'obtenir un consensus. Autrement dit, les individus n'ont pas tous les mêmes préférences sur A.

Le problème consiste donc à savoir quelles sont les « meilleures » procédures qui permettent de passer de préférences individuelles (a priori contradictoires) à une décision collective rationnelle. Ce problème est totalement similaire à celui que l'on rencontre lorsqu'on a à comparer des options et que l'on dispose de plusieurs critères de comparaison. Il existe, dans la vie de tous les jours, de nombreux exemples ou ce type de problème se pose . En compétition automobile on doit décerner le titre de champion (décision) au vu des résultats sur les différentes courses (critères individuels) de l'année. Ici les « individus » sont les courses : chaque course permet de classer sans ambiguïté les différents concurrents ; c'est-à-dire, dans le langage de l'économie, met en évidence une « préférence » parmi les coureurs. Le mécanisme qui permet d'attribuer le titre doit tenir compte de tous les résultats de manière la plus rationnelle possible. De même, le classement des candidats à un concours doit refléter leurs performances sur un certain nombre de disciplines différentes. Enfin, la décision du tracé d'une autoroute dépend *a priori* de différents critères comme le coût, l'impact sur l'environnement, le temps gagné, le décongestionnement des autres itinéraires. . .

3.2.2 Préférences individuelles

Définition : Préférence individuelle

Déf. : Une préférence individuelle notée $\succeq$ (on dit « préféré ou indifférent à »), ou critère, sur un ensemble A d'options possibles est une relation totale, réflexive et transitive (ce type de relation est appelé pré-ordre total) :

- relation totale : $\forall a, b \in A,\ a \succeq b\ ou\ b \succeq a$, on peut toujours comparer deux options de A
- réflexive : $\forall a \in A,\ a \succeq a$, une option est toujours préférée ou indifférente à elle-même (évidemment indifférente !).
- transitive : $\forall a, b, c \in A,\ (a \succeq b\ et\ b \succeq c) \Rightarrow a \succeq c$, si a est préférée à b et b à c alors a est préférée à c.

La transitivité traduit une condition minimale de rationalité : on imagine mal qu'un individu puisse dire, toutes choses égales par ailleurs, qu'il préfère c à a alors qu'il déclare préférer a à une troisième option meilleure que c pour lui !

Il faut noter qu'un pré-ordre est moins exigeant qu'un ordre au sens ou il tolère l'indifférence entre options différentes : pour une relation d'ordre (par exemple « plus grand que » dans l'ensemble des nombres) indifférence signifie égalité.

Définition : Préférence stricte

Etant donné un préordre $\succeq$, on dit que a est strictement préféré à b que l'on note $a \succ b$, si et seulement si :

$$a \succeq b\ et\ \neg(b \succeq a)$$

On dit que a est indifférent à b que l'on note $a \approx b$, si et seulement si :

$$a \succeq b\ et\ b \succeq a$$

Il est commode de représenter une relation par son diagramme. Il y a une flèche de a vers b lorsque $a \succ b$ et un trait simple lorsque $a \approx b$

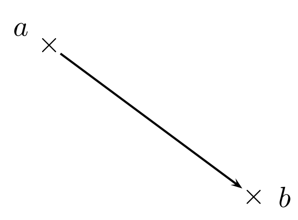


FIG. 3.1 – Graphe de la relation $a \succ b$

Sur le graphe, la transitivité se traduit par l'absence de cycle dans la relation (*cf. figure 3.2*).

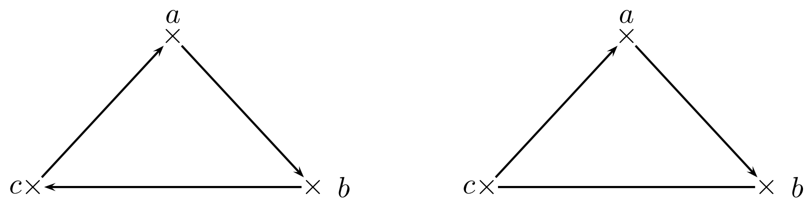


FIG. 3.2 – Exemple de relations non transitives

3.2.3 Procédure de choix collectif

Supposons maintenant qu'il y ait n individus ayant chacun une préférence $\succeq_i \quad i \in \{1, 2, \dots n\}$. Le problème qui se pose est alors de définir une procédure qui agrège ces préférences individuelles en une préférence collective. Autrement dit, on voudrait définir un mécanisme qui donne un préordre unique fonction de l'ensemble des préférences individuelles.

Définition : Profil

> On appelle « profil » un n-uplet de préférences individuelles : $P = (\succeq_1, \succeq_2, \cdots \succeq_n)$. Un profil correspond à l'état particulier des préférences individuelles.

Pour prendre une image, un profil correspond à « un état de l'opinion » concernant les éléments de A. On conçoit alors que lorsque le profil varie, l'opinion collective doit varier aussi. Le problème est de savoir comment cette préférence collective doit varier.

On voudrait donc définir une procédure qui permette d'associer à chaque profil possible un préordre « collectif » unique. Si l'on reprend les exemples précédents cela revient à définir la règle qui permet d'établir un classement annuel des pilotes en fonction des résultats des différentes courses de l'année. De la même façon, cela consiste à définir le règlement du concours qui donne la procédure de prise en compte des notes dans les différentes matières pour établir le classement final.

3.2.4 Définition : Agrégation

> On appelle procédure d'agrégation de préférence Ψ (ou fonctionnelle de choix social...) une application de l'ensemble des profils vers l'ensemble des préordres sur A :
>
> $$(\succeq_1, \succeq_2, \cdots \succeq_n) \mapsto \Psi(\succeq_1, \succeq_2, \cdots \succeq_n) = \succeq^*$$
>
> où $\succeq^*$ est un préordre sur A.

Quelles propriétés doit satisfaire cette application ? On conçoit aisément que toutes les manières d'agréger n'ont pas les bonnes propriétés : il serait par exemple curieux de définir un procédure qui décerne le titre de champion à un pilote arrivé dernier à toutes les courses ! On sent ainsi que parmi l'ensemble des procédures d'agrégation, certaines doivent être écarter parce qu'elles sont manifestement irrationnelles. Mais alors, quelles sont les propriétés de rationalité que l'on aimerait avoir ?

3.2.5 Propriétés minimales de rationalité

Le premier principe évident est le principe d'unanimité : si tous les critères ou individus classent l'option a avant l'option b alors le classement agrégé doit respecter cette hiérarchie :

Définition : Unanimité(Pareto)

On dit que Ψ vérifie la propriété d'unanimité stricte si :

$$\{\forall i \; a \succ_i b\} \Rightarrow a \succ^* b$$

La seconde propriété est appelée propriété d'indépendance : elle dit que le classement collectif entre deux options ne doit dépendre que de la configuration des préférences individuelles sur ces deux options. Autrement dit si pour deux profils différents (par exemple deux saisons consécutives de formule 1), deux options a et b ont exactement les mêmes positions relatives pour les différents critères (a est arrivé devant b (et réciproquement) dans les mêmes courses d'une année sur l'autre), alors le classement collectif entre a et b doit rester inchangé.

Définition : Indépendance

Propriété d'indépendance (Arrow) : Ψ vérifie la propriété d'indépendance si :

$\forall P, P'$ deux profils, si deux options a et b sont telles que $\forall i \; a \succ_i b \Leftrightarrow a \succ'_i b$ alors : $a\Psi(P)b \Leftrightarrow a\Psi(P')b$.

Pour bien comprendre ce que signifie cette propriété il est intéressant de donner des exemples de procédures qui ne la vérifient pas !

Exemples

Un dessert pour trois

Trois convives terminent un repas au restaurant. Ayant bien dîné ils décident de partager le dessert en trois. Ils appellent le serveur et lui demandent ce qu'il propose. Celui-ci répond qu'ils ont le choix entre glace (G), pâtisserie (P) ou fruits (F). Comme ces trois convives ont un grand souci de démocratie, ils décident d'utiliser une procédure d'agrégation de préférence. Celle-ci détermine que la glace (G) doit être le meilleur choix collectif. Avant même de prendre leur commande le serveur revient désolé en leur disant qu'il vient d'apprendre qu'il n'y a plus de fruits. Par acquis de conscience, les trois compères recalculent et trouvent curieusement que le dessert qu'ils doivent commander n'est plus la glace mais la pâtisserie (P). Ce type de revirement apparaît totalement irrationnel au sens ou un individu seul n'aurait jamais eu ce type de comportement. Pourtant, un certain nombre de procédures d'agrégation de préférences ou de critères ont ce type de défauts. L'exemple le plus simple est la procédure de type « championnat » de formule 1 appelée règle de Borda.

Règle de Borda

La règle de Borda permet d'établir un classement à partir des résultats sur plusieurs « courses » ou critères de la manière suivante. Prenons l'exemple de trois courses et quatre coureurs. A chaque course le vainqueur est crédité de 4 points, le second de 3 points le troisième de 2 point et le dernier de 1. En additionnant les points obtenus par chaque joueur on obtient un classement général. Prenons l'exemple suivant :

Course 1 : $A > B > C > D$ soit : 4 points pour A, 3 pour B, 2 pour C et 1 pour D.

Course 2 : $D > A > B > C$ soit : 3 points pour A, 2 pour B, 1 pour C et 4 pour D.
Course 3 : $C > A > B > D$ soit : 3 points pour A, 2 pour B, 4 pour C et 1 pour D.
Course 4 : $C > A > B > D$ soit : 3 points pour A, 2 pour B, 4 pour C et 1 pour D.
Course 5 : $C > A > D > B$ soit : 3 points pour A, 1 pour B, 4 pour C et 2 pour D.

Ce qui donne : 16 points pour A, 10 pour B, 15 pour C et 9 pour D. A est donc déclaré champion devant C. Cependant, supposons que l'on découvre que la voiture de B n'est pas conforme au règlement et, qu'en conséquence on décide de déclasser B dans toutes les courses. On obtient alors le résultat suivant :

Course 1 : $A > C > D > B$ soit : 4 points pour A, 1 pour B, 3 pour C et 2 pour D.
Course 2 : $D > A > C > B$ soit : 3 points pour A, 1 pour B, 2 pour C et 4 pour D.
Course 3 : $C > A > D > B$ soit : 3 points pour A, 1 pour B, 4 pour C et 2 pour D.
Course 4 : $C > A > D > B$ soit : 3 points pour A, 1 pour B, 4 pour C et 2 pour D.
Course 5 : $C > A > D > B$ soit : 3 points pour A, 1 pour B, 4 pour C et 2 pour D.

Ce qui donne alors toujours 16 points pour A, mais 17 pour C qui devient champion de ce fait !

On voit dans cet exemple que le classement entre A et C dépend des performances d'un troisième conducteur.

Définition : Procédures « dictatoriales »

On dit que la procédure Ψ est dictatoriale lorsqu'il existe un individu i (ou un critère) tel que pour tout couple (a, b) dans $A \times A$, $a \succ_i b \Rightarrow a \succ^* b$. Autrement dit, dans une procédure dictatoriale, un individu impose ses préférences strictes.

Théorème d'Arrow

> Si le nombre de décisions est supérieur à 3, les seules procédures qui permettent d'agréger n'importe quel profil en une préférence collective qui vérifient le principe d'unanimité stricte et le principe d'indépendance sont les procédures dictatoriales.

Ce résultat peut apparaître comme un résultat extrêmement négatif. Il dit en gros que la démocratie est impossible puisque les seules procédures « raisonnables » au sens des deux propriétés requises sont les procédures où les choix critiques sont laissés à un seul individu. Il faut voir cependant que ce que l'on exige est ici très fort. D'une part on demande que la procédure prévoit un résultat pour tous les profils de préférences envisageables. On peut penser au contraire que même s'ils diffèrent, les préférences des individus ne sont pas quelconques c'est-à-dire qu'elles varient sans décrire totalement l'ensemble de tous les préordres sur A. On montre qu'en relâchant la contrainte dite de domaine universel, c'est-à-dire en contraignant la variabilité des préférences, on peut définir des procédures rationnelles.

Paradoxe de Condorcet :

1,2 et 3 ont les préférences suivantes sur a, b et c. $\begin{cases} 1 : & a \to b \to c \\ 2 : & b \to c \to a \\ 3 : & c \to a \to b \end{cases}$

On a : $a \succ b \succ c \succ a$, c'est-à-dire que nous obtenons un préordre strict non transitif. Ainsi, le vote à la majorité ne donne pas nécessairement un préordre transitif. Ce paradoxe sert à la démonstration du théorème d'Arrow. Comment échapper au théorème d'Arrow ? On peut enlever l'hypothèse d'universalité : Si les individus ont des préférences qui varient dans un domaine particulier, alors il existe peut-être une solution. $\to$ préférences unimodales.

Analogie : Soit une « ville-rue ». Le maire a un service public à placer quelque part dans la rue. . .Mais où ?

On note y l'emplacement du service public et x_i l'emplacement des individus. On suppose que l'utilité pour l'individu i dépend de la distance qui le sépare du service public, *id est* : $u(x_i, y) = \breve{u}(|x_i - y|)$, elle ressemble à une sorte de cloche centrée en x_i ($\breve{u}' < 0$).

Dans le cas de préférences unimodales, la règle de la majorité aboutit à une relation transitive, *id est* :

$$a \succ b \Leftrightarrow |\{i \;/\; a \succ_i b\}| > |\{i \;/\; b \succ_i a\}|$$

Rem. : On suppose le nombre d'individus impair.

On montre aisément qu'il existe une position préférable à toutes les autres : la position médiane.
Le paradoxe de Condorcet n'est dès lors pas vérifié dans ce cas.

3.2.6 Critères de bien-être collectif

« Equilibre politico-économique ».

On se pose la question de savoir par exemple où placer un collège. On peut choisir la position médiane, mais on peut aussi choisir de minimiser les coûts de transports. Il y a quelque part deux écoles : les utilitaristes et les égalitaristes.

Critères égalitaristes

→ John Rawls. Prenons l'exemple de deux sociétés différentes. L'une possède une classe riche et une classe de miséreux, l'autre n'a qu'une seule classe d'individus affublés d'un horrible bérêt. Dans quelle société un individu préfèrera-t-il vivre, ne sachant pas dans quel type d'individus il va s'incarner ? Cela dépendra de son aversion pour le risque.
On dit que le juge est rawlsien s'il est infiniment risquophobe, c'est-à-dire que lorsqu'il observe une société, il regarde les individus les plus démunis. Il acceptera d'augmenter les inégalités pourvu que ça augmente les conditions de vie des miséreux. *In fine*, une politique rawlsienne vise à augmenter le bien-être du plus défavorisé.

Critères utilitaristes

L'utilitariste ne regarde pas les inégalités : par exemple, il ne va se soucier que du PIB par tête, sans se soucier des disparités de revenus. Le juge utilitariste est neutre au risque. Il ne regarde que l'espérance ; on l'appelle aussi juge Benthamien.

3.3 Biens Publics

3.3.1 Introduction

Il n'est pas rare, au cours d'une promenade à travers les villes ou dans certains immeubles de faire l'expérience « sensible » des problèmes économiques liés aux biens publics. Dans certains cas on constate facilement une différence notable d'entretien, de propreté ou de modernité entre les espaces publics (pelouses, allées, hall d'entrée d'immeuble,. . .) et les locaux ou appartements privés de la même rue ou du même immeuble.
Vous pouvez même, en fonction de l'étendue de la différence, en deux mots en fonction du contraste entre l'apparence des parties communes et le degré de « luxe » des espaces privés,

avoir une intuition du degré de l'« autorité » et du « pouvoir » des instances collectives chargées de la gestion des services communs.

On sent bien intuitivement que la fourniture de ce type de bien et de service se heurte à des problèmes spécifiques de décision et de financement qui conduisent selon le mode de fonctionnement aux différences citées précédemment. D'où vient le problème ?

En simplifiant on peut dire que la difficulté vient de ce que le coût de mise en place et aussi de fonctionnement de ce type de bien est difficilement « individualisable » de manière « rationnelle » : lorsqu'un individu consomme ou plutôt utilise (ou profite) de ce genre de service il ne le « détruit » pas à due proportion, il engendre vraisemblablement un coût marginal dû à l'usage mais ne consomme pas, au sens propre du terme le bien en question. Pour forcer le trait, on peut imaginer des biens ou des services dont le coût de production est complètement indépendant de la fréquentation ou de l'usage. Lorsqu'on est en présence d'un bien privé tel que la règle de la tarification au coût marginal suffise pour couvrir l'intégralité des coûts, le problème évoqué ci-dessus ne se pose pas : financement et décision efficace peuvent être atteints par le même instrument tarifaire. L'efficacité est facilement « décentralisable » c'est-à-dire laissée à la responsabilité du consommateur : si celui-ci veut consommer une unité de plus, il sait que sa décision engendre un coût égal justement au coût marginal, c'est-à-dire exactement égal au surcoût qu'il engendre. Dans notre problème on ne dispose pas de cette règle simple. Si je me mets à la place du fournisseur de service je pose alors le problème de la façon suivante : supposons que je veuille mettre en place un service collectif dont je connais le coût et que celui-ci est indépendant de la fréquentation. La première question que je me pose est de savoir si le jeu en vaut la chandelle, c'est-à-dire si le coût est plus petit que les avantages retirés par les consommateurs. Chaque utilisateur retire une certaine augmentation de bien-être de ce service, c'est-à-dire qu'il est prêt à payer une certaine somme pour jouir du service. Si en faisant la somme de ces consentements à payer cette somme est supérieure au coût, je suis sûr que mon projet est intéressant. Seulement le problème du financement n'est pas résolu pour autant : comment faire pour « forcer » chaque individu à payer une somme égale à son consentement à payer ; et ensuite comment répartir le surplus ?

3.3.2 Exemple

Supposons que je veuille construire une ligne de métro entre le centre-ville et l'aéroport d'une grande ville de province. Je peux évaluer les coûts d'investissement (génie-civil, voies, ouvrage d'art, tunnels divers et gares) et les coûts de fonctionnement d'une telle ligne. Parmi tous ces coûts, certains seront indépendants du trafic, d'autres seront variables avec la fréquentation de la ligne.

On supposera que l'ensemble des coûts fixes a une somme égale à C (par an, par exemple) et que le coût variable vaut m par voyageur $\times$ kilomètre. Le voyage est un bien privé comme les autres : quand j'occupe une place dans le train je la consomme au sens ou j'empêche un autre voyageur de voyager à cette place, en revanche l'existence de la ligne et la fréquence des trains sont des services collectifs au sens du paragraphe précédent.

Je peux me poser le problème de savoir si une telle ligne est « collectivement » intéressante. Pour cela, il faudrait que j'évalue le consentement à payer (en sus de m) de chaque voyageur potentiel par voyage, que j'en fasse la somme sur une année et que je la compare à C. Par exemple, si l'on suppose qu'un consommateur a un consentement à payer l'ensemble de ses voyages v_i (c'est par exemple, au minimum, l'ensemble des coûts monétaires et non monétaires, nets des avantages, associés à d'autres moyens de transports), $v_i - m \equiv \Phi_i$ représente, d'une certaines manière son consentement à payer la « possibilité » de voyager en métro.

Dans ces conditions, pour savoir si l'équipement vaut le coup, il suffit de comparer (sur 1 an) $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i$ et C. Même si $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i$ est supérieur à C, on n'est pas sûr que la solution étudiée soit la meilleure.

La procédure qu'il faut suivre consiste alors à examiner des variantes pour voir si l'on ne peut pas augmenter la différence entre la somme des consentements à payer et le coût. La meilleure solution sera alors caractérisée par le fait que « toute variante » détériore la différence entre $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i$ et C. Mathématiquement, cela signifie que la meilleure solution maximise $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i - C$.

En supposant que les variantes peuvent être définies de manière continue autour de la solution, cela signifie : en notant $\delta\Phi_i$ et δC les variations infinitésimales des grandeurs pertinentes, que l'on a, à l'optimum :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta\Phi_i = \delta C$$

cette condition (nécessaire) se lit : la somme des consentements marginaux à payer pour une modification marginale du projet est égale au coût de cette modification (coût supplémentaire entraîné par la modification).

En supposant que nous ayons trouvé la solution, se pose alors le problème du financement. Peut-on, sans risque proposer un prix qui ne dépende pas du consentement à payer, par exemple un abonnement égal à $\frac{C}{n}$? Tout va bien si chacun des Φ_i est plus grand que $\frac{C}{n}$. En revanche si (et c'est évidemment le plus souvent le cas), certains Φ_i sont inférieurs à $\frac{C}{n}$, ces consommateurs ne s'abonnent pas et l'ouvrage ne pourra pas être financé. Ce phénomène est ce que l'on appelle un phénomène d'« anti-sélection » ou d'« écrémage » involontaire qui est l'un des problèmes centraux liés aux biens publics. Quelles sont dans ces conditions les portes de sortie ?

« La solution repose sur le principe général suivant : c'est qu'il faut demander pour prix non ce qu'il coûte mais une somme en rapport avec l'importance qu'attache celui auquel il est vendu », Jules DUPUIT. Certes, mais comment faire pour y parvenir, chacun n'aura-t-il pas la tentation de dissimuler le prix qu'il est prêt à payer ? Et si par hasard on peut estimer indirectement ce prix, la discrimination qui en résulte est-elle légitime ?

3.3.3 Définitions

La façon la plus simple de définir un « bien public » ou « collectif » se fait par opposition au bien privé. Lorsque je consomme un plat de cassoulet, ou lorsque j'utilise mon magnétoscope, ce cassoulet précisément, c'est-à-dire physiquement, ne peut être consommé par personne d'autre puisque c'est moi qui le mange. De même ce magnétoscope que j'utilise en ce moment ne peut pas être utilisé par quelqu'un d'autre que moi à ce même moment. Ce sont là des biens privés au sens où il y a rivalité dans la consommation.

Dès que je consomme (ou utilise) une certains quantité de bien, j'empêche physiquement mon voisin de consommer ce que je consomme. Ce phénomène de rivalité est au centre de l'économie ; c'est parce qu'il y a rivalité et rareté que se pose le problème de la répartition des ressources entre les différents membres d'une société.

Formellement, si on note x_i la quantité d'un certain bien privé consommée par l'individu i, la quantité totale x qui doit être disponible pour satisfaire la consommation de n individus doit, par la force des choses être égale à $x = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Un bien public, au contraire, ne suppose aucune rivalité dans la consommation. Si ce bien public est produit en quantité x, tous les consommateurs peuvent consommer chacun l'intégralité du bien public.

Définition 1 :
Bien Public Pur. On dit que $[y]$ est un bien public pur si, y_i étant la quantité de bien consommée par l'individu i, la quantité totale qui doit être disponible pour satisfaire la consommation des n individus est égale à : $y = \max(y_i)$.

A cette condition de non rivalité, on ajoute parfois, pour définir un bien public, une condition de non exclusion, ou de manière plus forte, une condition d'obligation d'usage. On dit qu'un bien est sans exclusion lorsqu'on ne peut pas empêcher un consommateur de consommer le bien (par exemple en le faisant payer une redevance dissuasive). On dit qu'il y a obligation d'usage lorsque aucun consommateur ne peut choisir de ne pas consommer le bien. Ces deux caractéristiques sont liées à des considérations institutionnelles ou technologiques qui peuvent contraindre les mécanismes de financement. Ici, nous ne retiendrons que la définition technique d'un bien public pur : la condition de non rivalité.

Il existe en fait un grand nombre de cas intermédiaires entre bien privé et bien public pur. C'est le cas des biens pour lesquels la rivalité est partielle au sens où lorsqu'un individu consomme un peu plus de bien, il gêne les autres consommateurs. Ce type de bien, dont l'exemple le plus évident est celui des biens publics soumis à « encombrement ».

3.3.4 Equation de BOWEN–LINDAHL–SAMUELSON, premier rang

La première question qui se pose est une question normative : faut-il « construire » le bien public et à quel niveau ? Supposons pour simplifier qu'il existe 2 biens dans l'économie, 1 bien public $[y]$ et un bien privé $[x]$ pris comme numéraire. On suppose que chaque individu arbitre entre les deux biens au moyen d'une fonction d'utilité u_i. Ainsi $u_i(y_i, x_i)$ représente l'utilité du consommateur i lorsqu'il consomme x_i unité du bien privé, et y_i unités du bien public. On suppose que la production d'une quantité y de bien public engendre un coût $C(y)$ en numéraire. Les ressources initiales de l'économie se résument à Ω unités de bien privé réparties entre les consommateurs : $\Omega = \sum_i \omega_i$. On suppose enfin que les fonctions d'utilité sont croissantes en fonction de leur deux arguments. Dans ces conditions, l'optimalité, ou plutôt l'efficacité requiert $y_i = y$. Il serait en effet absurde, du point de vue de l'efficacité de ne pas faire profiter chaque consommateur de l'intégralité du bien public.

Réalisabilité et rationalité individuelle

Définition 2

L'allocation (y, x_i) est réalisable et individuellement rationnelle avec $y > 0$ si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + C(y) \leq \Omega \quad (1)$$
$$\forall i,\ u_i(y, x_i) \geq u_i(0, \omega_i) \quad (2)$$

Cette condition est une condition nécessaire pour qu'une production y de bien public soit Pareto améliorante, étant données les ressources initiales. Définissons alors la quantité $\Phi_i(y)$ de numéraire vérifiant :

$$u_i(y, \omega_i - \Phi_i(y)) = u_i(0, \omega_i) \quad (3)$$

Φ_i représente exactement le « consentement brut » à payer de l'individu i pour passer de 0 à y. Notons que ce consentement brut à payer peut être négatif (auquel cas le bien public lèse l'individu en question[2]). On a alors le résultat évident suivant :

[2] La construction d'une ligne TGV sous les fenêtres d'un individu lui apporte plus d'inconvénients que d'avantages : son consentement à payer sera dans ce cas négatif.

Propriété 1 :
y est une quantité de bien public associée à une allocation réalisable et individuellement rationnelle si et seulement si :

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(y) \geq C(y) \quad (4)$$

On interprète cette condition en disant que la somme des consentements bruts à payer y est plus grande que le coût.

Efficacité
L'inéquation (4) ne dit pas que y est efficace. Elle dit simplement que produire y est plus efficace que ne rien produire ! Nous devons alors chercher sous quelles conditions (nécessaires) y, est associée à une allocation efficace. Une condition nécessaire pour que y soit associée à une allocation efficace est qu'il n'existe pas de variante « autour de y » qui la domine au sens de Pareto. Une variante est caractérisée par une variation Δy de bien public et des variations Δx_i de l'allocation en bien privé. Elle est réalisable et Pareto améliorante si :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{N} x_i + \sum_{i=1}^{N} \Delta x_i + C(y+\Delta y) \leq \Omega \\ \forall i \ u_i(y+\Delta y, x_i + \Delta x_i) \geq u_i(y, x_i) \end{cases}$$

Définissons comme tout à l'heure le consentement à payer de l'individu i pour passer de l'allocation initiale (y, x_i) à une allocation dans laquelle le bien public est produit en quantité $y + \Delta y$, notons $\tilde{\Pi}_i(y, \Delta y, x_i)$ ce consentement à payer (éventuellement négatif).

$$u_i(y+\Delta y, x_i - \tilde{\Pi}_i) = u_i(y, x_i)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que (y, x_i) soit efficace est alors que pour toute variante Δy, $\sum_{i=1}^{N} \tilde{\Pi}_i \leq C(y+\Delta y) - C(y)$. Cette condition signifie simplement, par exemple pour $\Delta y > 0$, que la somme des consentements à payer Δy ne couvre pas le coût incrémental. Sinon il existerait $t_i < \tilde{\Pi}_i$ tels que $\sum_{i=1}^{N} t_i = C(y+\Delta y) - C(y)$, qui donnerait pour i une utilité $u_i(y+\Delta y, x_i - t_i) > u_i(y, x_i)$.

Définition 3 : On appelle consentement marginal à payer du consommateur i :

$$\Pi_i(y, x_i) = \lim_{\Delta y \to 0} \left\{ \frac{\tilde{\Pi}_i(y, \Delta y, x_i)}{\Delta y} \right\}$$

on a évidemment :

$$\Pi_i(y, x_i) = \frac{\frac{\partial u_i}{\partial y}(y, x_i)}{\frac{\partial u_i}{\partial x_i}(y, x_i)}$$

On a alors le résultat suivant :

Théorème 1 : Equation de Bowen–Lindahl–Samuelson

Une condition nécessaire pour que (y, x_i) soit efficace est que :

$$\sum_{i=1}^{N} \Pi_i(y, x_i) = C'(y) \quad (5)$$

En effet sinon, si $\sum_{i=1}^{N} \Pi_i(y, x_i) > C'(y)$ (respectivement $<$), on peut trouver $\Delta y > 0$ (respectivement <0) assez petit en valeur absolue tel que :

$$\sum_i \frac{\tilde{\Pi}_i(y, \Delta y, x_i)}{\Delta y} > \frac{C(y+\Delta y) - C(y)}{\Delta y} \quad \text{(resp. } <\text{)}$$

c'est-à-dire :

$$\sum_i \tilde{\Pi}_i(y, \Delta y, x_i) > C(y + \Delta y) - C(y)$$

La condition de Samuelson est la condition de premier rang associée au problème de bien public. Normativement, c'est l'équation que doit vérifier l'allocation optimale qui garantit l'efficacité au sens de Pareto.

Il existe un cas particulier intéressant qui permet de mettre en évidence les problèmes pratiques associés à la décision publique. Supposons par exemple que $\Pi_i(y, x_i)$ ne dépend pas de x_i. Il est facile de voir qu'alors $\Pi_i(y) \equiv \Phi'(y)$, le consentement marginal à payer est exactement égal à la dérivée du consentement brut à payer. Posons alors $S(y) = \sum_i \Phi_i(y) - C(y)$. S s'interprète comme le surplus collectif associé à y. Les conditions ci-dessus signifient alors que la production efficace doit maximiser le surplus S, à condition bien sûr que le surplus obtenu soit positif. Il existe alors un degré de liberté sur la clé de répartition du financement, on doit avoir $\sum_i t_i = C(y)$ et $t_i \leq \Phi_i(y)$. Tout se passe alors comme si la décision publique se décomposait en deux étapes successives. La première consiste à trouver y qui maximise le surplus, c'est-à-dire tel que la différence entre somme des avantages individuels et coût soit maximale. La seconde étape consiste à déterminer la clé de financement, c'est-à-dire, de façon équivalente à fixer la redistribution du surplus entre les différents individus.

Calcul économique

Tout projet public fait l'objet en général d'une étude économique préliminaire visant à en déterminer la rentabilité collective. Théoriquement, c'est la démarche esquissée ci-dessus qui devrait être mise en œuvre : parmi toutes les variantes, choisir celle qui maximise le surplus, vérifier ensuite que ce surplus est positif, réaliser enfin les transferts nécessaires de manière à garantir qu'aucun agent n'est lésé dans l'affaire.

Dans la pratique il est rare que l'intégralité de la démarche ci-dessus soit effectuée dans toute sa rigueur. Deux erreurs méthodologiques méritent d'être soulignées.

- La seule prise en compte du surplus.

Dans de nombreux cas, on se borne à vérifier que le surplus associé à une décision est positif pour l'imposer.

On vérifie alors seulement l'inéquation $\sum_{i=1}^{N} \Phi_i(y) \geq C(y)$.

Cette condition n'est évidemment pas suffisante pour affirmer que le projet est efficace. On peut être extrêmement loin de la maximisation du surplus. Rien ne garantit qu'il n'existe pas d'autres variantes qui améliorent significativement le bilan entre avantages et coût. La démarche rigoureuse consiste à étudier un ensemble de variantes pour vérifier que le surplus ne peut être amélioré. Ceci conduit à appliquer la condition de BLS marginale, soit en supposant qu'il n'y a pas d'effet revenu ($\Pi_i(y, x_i) \equiv \Phi_i'(y)$), choisir y tel que :

$$\sum_{i=1}^{N} \Phi_i'(y) = C'(y)$$

- L'omission des effets redistributifs.

S'en tenir au seul arbitrage collectif masque les effets redistributifs de la décision publique. Ne pas se soucier des transferts qui matérialisent la clé de répartition du coût peut conduire à une redistribution du surplus inégalitaire et même à des rentes indues. Imposer un projet public sous prétexte du seul intérêt collectif, sans prise en compte des surplus individuels, favorise les individus ayant un fort consentement à payer au détriment de ceux qui ont un consentement petit ou même négatif.

Considérons par exemple un projet public qui vérifie l'équation de BLS. Supposons de plus que $\sum_{i=1}^{n} \Phi_i(y) \geq C(y)$ et qu'il y ait une forte hétérogénéité des consentements à payer dans la population : certains ont un consentement négatif (le projet public les lèse). D'autres ont un consentement très élevé (le projet les avantage). Pour que le projet soit efficace et individuellement rationnel il faut mettre en place des transferts tels que : $\forall i \; t_i \leq \Phi_i(y)$, c'est-à-dire en particulier indemniser les consommateurs lésés. Cette indemnisation est un coût collectif supplémentaire qui ne peut être financé que par les consommateurs avantagés. Si l'on indemnise pas les consommateurs lésés on crée de fait un surplus positif indu (une rente) pour ceux ayant un consentement à payer positif.

3.3.5 Décentralisation

Dans ce qui précède on suppose implicitement qu'une autorité collective est capable de mener à bien les calculs menant aux conditions d'efficacité.

La question légitime que l'on peut se poser est de savoir si le marché, c'est-à-dire une organisation institutionnelle complètement décentralisée, permet d'obtenir une allocation efficace. Le plus simple pour y répondre est de raisonner par conditions nécessaires.

Si l'on veut que le marché aboutisse à une allocation efficace, il faut que le prix d'équilibre associé au bien public soit tel que chaque consommateur demande la quantité de bien public efficace. Ceci imposerait que l'on ait, en appelant p le prix du bien public :

$$p = \frac{\frac{\partial u_i}{\partial y}}{\frac{\partial u_i}{\partial x}} = \Pi_i(y, x_i)$$

L'équation précédente est la condition nécessaire du premier ordre pour que (y, x_i) maximise $u_i(y, x_i)$ sous contrainte de budget $py + x_i = \omega_i$. Ceci qui impose en particulier l'égalité des taux marginaux de substitution (c'est-à-dire des consentement marginaux à payer), de tous les consommateurs. Or l'équation de Samuelson n'implique absolument pas l'égalité (sauf exception) des taux marginaux. Cette première remarque nous conduit alors à reconsidérer le problème. Un signal prix unique ne suffit pas : il faut introduire autant de prix qu'il y a de consommateurs. Face à un prix individualisé p_i le consommateur i émettra une demande telle que l'on ait :

$$p_i = \frac{\frac{\partial u_i}{\partial y}(x_i, y)}{\frac{\partial u_i}{\partial x}(x_i, y)}$$

Pour garantir l'efficacité il faudrait avoir :

$$\sum_i p_i = C'(y)$$

Ce qui est la condition du premier ordre associée à la maximisation du profit de l'offreur :

$$\max_y \{ \sum_i p_i y - C(y) \}$$

Pour pouvoir obtenir une allocation efficace comme résultat d'équilibre concurrentiel, il faut ainsi créer autant de « marchés » que de consommateurs : le commissaire priseur doit ajuster les différents prix individu par individu.

On voit ainsi que pour obtenir une allocation efficace comme résultat d'un équilibre de concurrence, on est conduit à créer autant de marchés que d'usagers. Cette condition est difficilement compatible avec l'hypothèse de comportement de preneur de prix des consommateurs : chaque usager est seul demandeur sur son marché, il peut plus facilement mettre à profit cette situation de monopsone pour tenter de manipuler le prix à son avantage.

Il existe cependant un cas d'application dans lequel, formellement, le marché est organisé sur la base de prix personnalisés : il s'agit de la modulation horaire des tarifs de services tels que le téléphone ou l'électricité. La fourniture de ce type de service permettant une consommation $y(t)$ à chaque instant, implique la mise en place d'équipements qui doivent être dimensionnés à un niveau K de manière à satisfaire les pointes de demande : $K = \max y(t)$. Une fois cette capacité mise en place, toute demande inférieure peut être satisfaite pour un coût égal au seul coût marginal de court terme (par exemple le coût du combustible) ; en revanche pour satisfaire une demande supérieure à la capacité il faut élargir la capacité de production et donc engager un coût marginal de développement $C'(K)$. Formellement, la capacité est un bien public au sens où elle est entièrement disponible à des instants différents : son utilisation à un instant donné n'empêche absolument pas son utilisation à un autre moment. C'est une caractéristique de non rivalité temporelle formellement équivalente à la condition de non rivalité des biens publics traditionnels. Dans ces conditions, les prix personnalisés s'interprètent comme les prix d'usage à chaque instant. La condition de BLS signifie alors que la somme des prix instantanés (c'est-à-dire le prix associé à l'usage permanent de l'infrastructure) doit être égal au coût marginal de développement.

Négociation en information complète

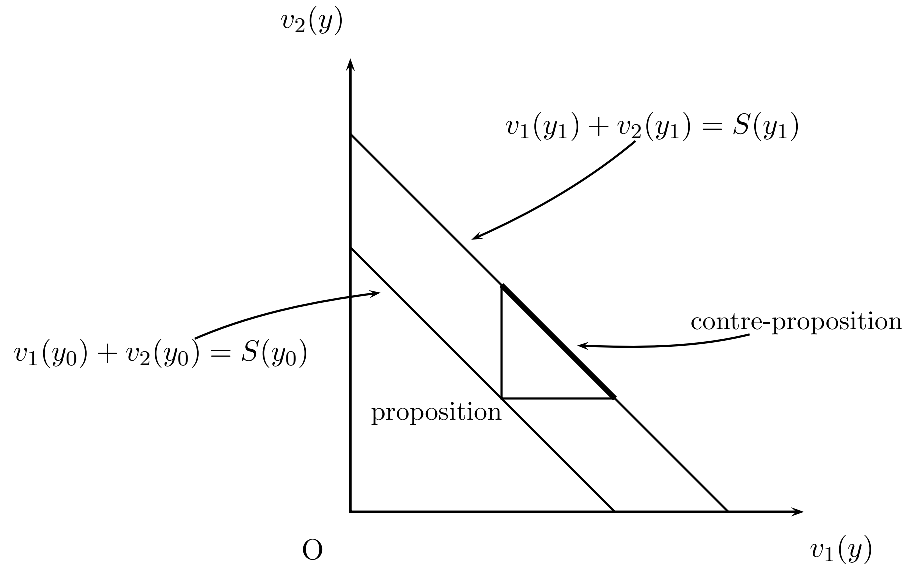
Une autre possibilité, en l'absence de centre calculateur, consiste à supposer que les différents consommateurs sont capables de négocier librement pour aboutir à un consensus. Lorsque l'information est complète, c'est-à-dire lorsque chaque agent connaît les préférences des autres, on peut montrer que le processus de négociation est efficace.

Supposons par exemple le modèle simple sans effet revenu ($\Pi_i(y, x_i) \equiv \Phi_i'(y)$). A chaque décision y est associé un surplus collectif $S(y) = \sum_i \Phi_i(y) - C(y)$. Si les transferts entre les agents sont possibles, une allocation est caractérisée par une répartition du surplus, chaque consommateur se retrouvant finalement avec un surplus individuel $v_i(y)$ positif vérifiant $\sum_i v_i(y) = S(y)$. Le processus de négociation prend la forme de propositions et de contre-propositions sur y et la répartition v. Sans rentrer dans le détail du jeu de négociation, on peut cependant donner l'intuition du résultat.

Il est d'abord clair qu'une proposition dans laquelle $y = y_0$ est inefficace n'a aucune chance d'être adoptée par les négociateurs : il est facile de trouver une contre-proposition dans laquelle $y = y_1$ est un niveau de bien public donnant un surplus collectif plus grand et une répartition de ce surplus unanimement préférée par tous les protagonistes.

La négociation ne peut donc aboutir qu'à un niveau de bien public efficace. La répartition du surplus dépend alors de pouvoir relatif de négociation de chacun des protagonistes.

Ce résultat d'efficacité de la négociation repose crucialement sur l'hypothèse d'information complète : lorsqu'un négociateur fait une proposition il sait à l'avance qu'elle sera acceptée ou refusée par tel ou tel autre agent. Ainsi la négociation s'arrête lorsqu'un état efficace est atteint, elle se poursuit si l'on peut trouver une allocation qui améliore le bien-être de chacun.



Second rang

Lorsque « la puissance publique » est parfaitement informée, la décision de mise en place et celle du financement du bien public peuvent être menées indépendamment : d'abord trouver y qui maximise le surplus, ensuite fixer les contributions individuelles t_i, $t_i \leq \Phi_i(y)$, de sorte que $\sum_i t_i = C(y)$.

Tout change bien sûr lorsque l'Etat ne possède qu'une information imparfaite sur les consentements à payer individuels.

Supposons d'abord que l'Etat est en mesure de connaître uniquement la somme des consentements à payer $\Phi(y) = \sum_i \Phi_i(y)$ sans pouvoir observer le consentement individuel de chacun.

L'Etat peut calculer le niveau optimal de bien public en résolvant l'équation de BLS. En revanche il se heurte à un problème informationnel lorsqu'il doit fixer les contributions individuelles. S'il fixe une contribution uniforme égale à $\frac{C(y)}{n}$, rien ne garantit que chaque consommateur aura augmenté son bien-être par rapport au status-quo. C'est le cas en particulier lorsque $\min_i \Phi_i(y) < \frac{C(y)}{n} \leq \frac{\Phi(y)}{n}$. Dans ce cas l'allocation finale n'est pas plus efficace que le status quo : certains voient leur bien-être diminuer.

On pourrait imaginer que l'Etat mette en place un mécanisme qui s'apparente à un mécanisme d'enchère : chacun doit annoncer son consentement à payer. Si la somme n'est pas celle prévue alors le bien public n'est pas réalisé. Si la somme est celle prévue alors on réalise le bien et on demande à chacun une contribution telle que le surplus individuel net $v_i(y)$ soit constant égal à $\frac{\Phi(y)-C(y)}{n}$. Annoncer son véritable consentement à payer est une stratégie d'équilibre de Nash : si les autres annoncent la vérité alors chaque individu a intérêt à annoncer la vérité. Evidemment, dès qu'il y a incertitude sur la somme des consentements, le résultat ne tient plus.

Tout se complique lorsque l'autorité collective n'a pas d'information *a priori* ni sur la somme des consentements à payer ni sur leur valeur individuelle. La section complémentaire à ce chapitre présente un mécanisme de révélation qui permet de s'affranchir en partie de ce problème.

D'une manière générale, lorsque l'absence d'information interdit l'usage de transferts individuels forfaitaires, le financement du bien public ne peut se faire qu'à l'aide d'instruments indirects. On peut concevoir différentes options : le financement fondé sur l'usage en introduisant une charge d'accès ou un péage, le financement fondé sur des ressources fiscales prélevées sur la consommation ou la production d'autres biens.

L'introduction d'un péage, lorsqu'il est possible techniquement, c'est-à-dire lorsque le bien public peut faire l'objet d'exclusion, soulève le problème général d'antisélection ou d'écrémage involontaire. La section complémentaire propose un modèle simple qui permet d'expliquer le phénomène (*cf. adhenriet.free.fr* pour davantage de précisions sur le mécanisme de Vickrey. Le financement par la fiscalité implique des distorsions dans les prix des autres biens. Ces distorsions introduisent elle-mêmes des inefficacités puisque les prix ne sont plus les prix d'équilibre concurrentiel. Nous reviendrons plus loin, dans le chapitre consacré à la fiscalité ; sur ce type de problème.

Mécanisme révélateur de Vickrey

Supposons que le maire d'une ville de n pêcheurs soit face à la décision suivante : faut-il construire un phare ? Chaque pêcheur a un consentement à payer le phare θ_i. Le coût du phare est C. On suppose que : $\sum_{i=1}^{i=n} \theta_i \geq C$. Le maire, ne connaissant pas les θ_i, demande à chaque pêcheur son θ et adopte le processus de décision suivant :

$$\begin{cases} \text{Si } \sum_i \theta'_i \geq C, \text{ il entreprend la construction} \\ \text{Sinon, pas de phare.} \end{cases}$$

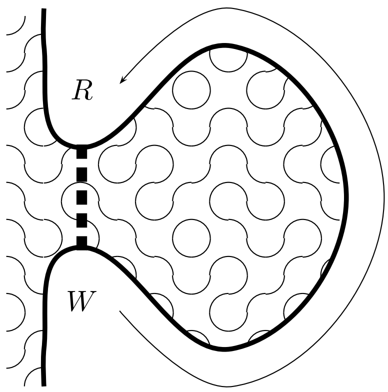
L'idée est de faire payer une taxe à l'individu qui dépend de son annonce θ et de l'annonce des autres Z : $t(\theta, Z)$. Plus précisément :

$$\begin{cases} \text{Si } (\theta + \bar{Z} - C)(\bar{Z} - C) \geq 0 \text{ alors } t = 0 \\ \text{Si } (\theta + \bar{Z} - C)(\bar{Z} - C) \leq 0 \text{ alors } t = |\bar{Z} - C| \end{cases}$$

C'est le mécanisme de Vickrey. Dans le premier cas, la taxe est nulle car l'annonce de l'individu ne fait pas basculer la décision ($\theta + \bar{Z} - C$ et $\bar{Z} - C$ de même signe). Dans le second cas, l'individu est « pivot » c'est-à-dire que son annonce fait basculer la décision et on le taxe pour compenser le bien-être collectif manquant (même s'il fait basculer la décision dans le « bon » sens, i.e. la construction).

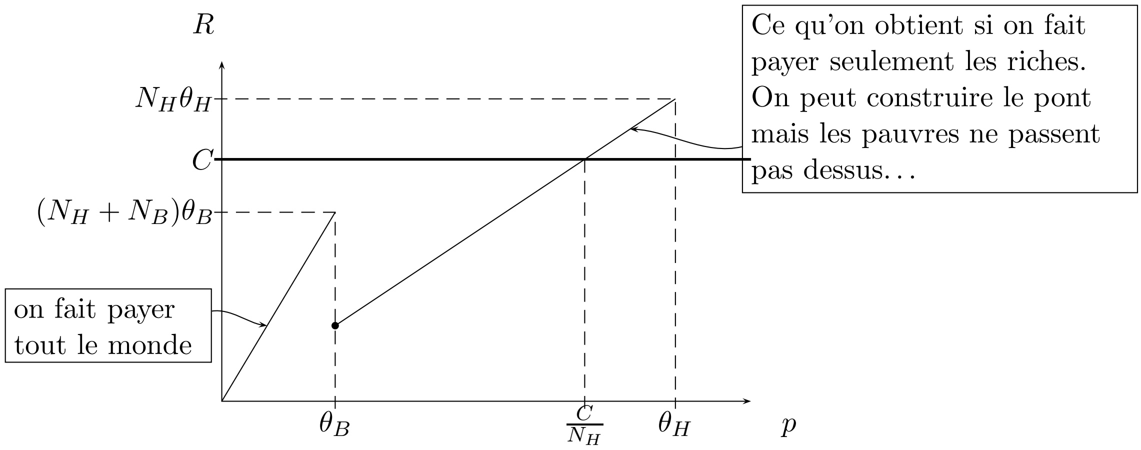
Exemple

Prenons un exemple concret.



W est une zone de travail et R est une zone résidentielle. Faut-il construire un pont ? (qui ferait gagner 1 heure de transports !). On suppose qu'il y a N_H individus dont le consentement à payer est θ_H et N_B dont le consentement à payer est θ_B, avec $\theta_B < \theta_H$. On note C, le coût de construction du pont. On suppose que : $N_H\theta_H + N_B\theta_B \geq C$.

Pour financer le pont, le maire va introduire un péage sur le pont.



On a supposé que $(N_H+N_B)\theta_B \leq C \leq N_H\theta_H$. Nous sommes là dans un contexte d'anti-sélection : ceux qui ont un consentement à payer faible ne vont pas passer sur le pont. Donc le péage ne peut pas financer le pont.

Tâchons de pallier ceci. Pour ce faire, supposons qu'on puisse moduler la qualité q du pont, avec $q \in [0,1]$. On fait l'hypothèse qu'un prix p_H donne lieu à une qualité 1, et un prix p_B donne lieu à une qualité $q_B < 1$.

q_B doit alors vérifier le système suivant :

$$\begin{cases} \theta_H - p_H \geq \theta_H q_B - p_B \\ \theta_B q_B - p_B \geq \theta_B - p_H \\ N_H p_H + N_B p_B = C \\ \theta_H - p_H \geq 0 \\ \theta_B q_B - p_B \geq 0 \end{cases}$$

Ce système admet au moins une solution : par exemple, $p_B = 0$ (on fait passer gratuitement les miséreux) et $p_H = \frac{C}{N_H}$ et on a : $\theta_H(1-q_B) = \frac{C}{N_H} \Leftrightarrow q_B = 1 - \frac{C}{\theta_H N_H}$.

3.4 Externalités

3.4.1 Introduction

Définition 1 :

On dit qu'il y a externalité lorsque l'activité de consommation ou de production d'un agent a une influence sur le bien-être d'un autre sans que cette interaction ne fasse l'objet d'une transaction économique.

On distingue les externalités négatives et les externalités positives.

La pollution est l'exemple le plus typique d'externalité négative : lorsqu'une usine pollue son environnement en rejetant des déchets, elle inflige une nuisance aux habitants de la région. Cette pollution n'est pas nécessairement attachée à des rejets toxiques, elle peut être visuelle (la construction d'un équipement productif ou même de logements peut altérer la vue initiale des riverains), sonore, ou de manière plus générale, modifier certains équilibres naturels ce qui, indirectement, peut affecter le bien-être de certains agents de l'économie.

L'encombrement dû à la circulation automobile est un exemple d'externalité négative réciproque : chaque automobiliste gêne son voisin de sorte que l'augmentation de la circulation entraîne une congestion qui rend les déplacements de plus en plus difficile.

On parle d'externalité positive dans le cas où l'interaction aboutit à une augmentation de bien-être. L'effet de norme ou de club est l'exemple d'externalité positive réciproque : la valeur accordée par un consommateur à un produit ou à un service augmente lorsque le nombre de consommateurs de ce produit ou service s'accroît. Ainsi en est-il par exemple du téléphone ou de la télécopie : plus le réseau est étendu, plus nombreux sont les correspondants accessibles et donc plus le raccordement devient intéressant pour un nouvel abonné.

La caractéristique d'une externalité est de ne pas être associée à une transaction économique. Il en résulte que l'arbitrage présidant à la décision privée ne tient pas compte des coûts ou des avantages associés à l'externalité . Dans le cas d'une externalité négative cette omission aboutit à une sur-pollution. Dans le cas d'externalité positive cela conduit au contraire à une sous production.

Restaurer l'efficacité suppose alors la mise en place d'instruments dont l'objectif est d'internaliser l'externalité. c'est-à-dire des instruments susceptibles de réintroduire les coûts ou avantages externes dans l'arbitrage privé.

Nous allons examiner, pour le cas de la pollution, les différents instruments envisageables.

3.4.2 Un modèle de pollution

Pour fixer les idées, nous allons utiliser un modèle simple de pollution. Des usines, en nombre K, sont installées au bord d'un lac et y déversent des déchets qui détériorent la qualité de l'eau. La quantité de déchets déversée par l'usine j est notée q_j. La qualité de l'eau dépend de la quantité totale de déchets déversés $y = \bar{y} - \sum_{j=1}^{K} q_j$, où $\bar{y}$ désigne la qualité de l'eau pure. Sans aucune réglementation ou intervention publique, les entreprises ne sont pas incitées à réduire leur pollution. Dans ce cas elles déversent chacune une quantité de déchets égale à $\bar{q}_j$ ce qui conduit à une eau de mauvaise qualité $y_0 = \bar{y} - \sum_{j=1}^{K} \bar{q}_j$. Pour les riverains du lac, la qualité de l'eau est un bien public. Le consentement à payer du consommateur i pour passer d'une eau de qualité y_0 à une eau de qualité y est notée $\Phi_i(y)$, le consentement marginal à payer correspondant sera noté $\Pi_i(y) \equiv \frac{d\Phi_i}{dy}(y)$.

Chaque entreprise a d'autre part accès à une technologie de traitement de déchets qui lui permet, moyennant un coût de dépollution, de rejeter moins de déchets dans le lac. On supposera que le coût de dépollution pour passer d'une quantité de rejet $\bar{q}$ à une quantité q pour l'entreprise j s'écrit :

$$\Gamma_j(q) = \int_q^{\bar{q}} \gamma_j(s) ds$$

$\gamma_j(s)$, supposée décroissante, s'interprète comme le coût marginal de dépollution. Ce coût marginal est d'autant plus fort que la quantité de rejets est faible : on traduit ainsi la difficulté croissante inhérente à la dépollution.

Du point de vue de l'efficacité collective il y a un double arbitrage à réaliser : l'arbitrage entre le coût de dépollution et l'avantage de disposer d'eau plus pure d'une part, et la répartition de la charge de dépollution entre les différentes firmes d'autre part.

Il est clair d'abord que le coût total de dépollution, pour un niveau donné de rejets, doit être minimisé. Ceci impose donc que, pour chaque niveau total donné de rejets q envisagé, les quantités de rejets des différentes entreprises soient :

$$(q_1, \dots q_j, \dots q_K) = \arg\min\{\sum_j \Gamma_j(q_j) \ / \ \sum_j q_j = q\}$$

c'est-à-dire telle que la répartition des rejets minimise le coût total.

Il en résulte qu'on doit répartir la charge de dépollution de manière à égaliser les coûts marginaux de dépollution :

$$\forall j, k \ \gamma_j(q_j) = \gamma_k(q_k)$$

Si ce n'était pas le cas il serait toujours possible, à quantité totale de déchets donnée, de diminuer le coût total en autorisant une augmentation des rejets de l'entreprise ayant un coût marginal élevé compensée, à due concurrence, par une diminution de ceux de l'entreprise ayant un coût marginal faible.

Si l'on note :

$$\Gamma(q) = \min\{\sum_j \Gamma_j(q_j) \ / \ \sum_j q_j = q\}$$

le coût total de dépollution, on a bien sûr, par le théorème de l'enveloppe :

$$\Gamma'(q) = -\gamma_j(q_j)$$

Le coût marginal total de dépollution (que l'on notera $\gamma(q)$) est égal, à l'optimum, au coût marginal commun de chacune des entreprises.

Il s'agit ensuite de déterminer le niveau efficace de pollution total. Clairement, la qualité de l'eau est un bien public pour l'ensemble des consommateur. L'Equation de BLS nous donne alors la solution : la quantité efficace de rejets q^* est solution de :

$$\sum_{i=1}^{n} \Pi_i(\bar{y} - q^*) = \gamma(q^*)$$

3.4.3 Les instruments

Taxe ou subvention ?

Spontanément, il n'y a aucune incitation, pour les entreprises, à entreprendre une réduction de leur émission de déchets. Quels instruments sont susceptibles de les responsabiliser ?

La première idée serait d'appliquer le principe « pollueur–payeur » en taxant les entreprises en fonction de la quantité de déchets déversés. C'est là, en quelque sorte, un instrument d'intéressement « négatif » : la pollution est sanctionnée.

La seconde solution consisterait à subventionner la dépollution. C'est plutôt là un instrument d'intéressement « positif » : la dépollution est récompensée.

Ces différentes solutions correspondent comme on le verra un peu plus loin à une répartition implicite des droits de propriété sur le « bien public » environnement.

Examinons plus généralement l'incidence d'un instrument mixte comprenant, une taxe linéaire à la pollution τq, et une subvention affine à la dépollution comportant une partie forfaitaire et une partie proportionnelle au coût de dépollution, $B + \alpha\Gamma_j(q)$.

Face à un tel instrument, la firme j choisit un niveau de rejet qui minimise le coût restant à sa charge :

$$q_j = \arg\min\{(1-\alpha)\int_q^{\bar{q}} \gamma_j(s)ds + \tau q\}$$

c'est-à-dire vérifiant :

$$(1-\alpha)\gamma_j(q_j) = \tau$$

Comment faire alors pour que la décision de l'entreprise soit efficace ? Un simple coût d'œil suffit pour remarquer qu'en fixant les paramètres fiscaux de manière à avoir $\frac{\tau}{1-\alpha} = \gamma(q^*)$, où q^* est le niveau efficace déterminé dans le paragraphe précédent, la puissance publique incite chaque entreprise à choisir le comportement optimal. En choisissant les paramètre fiscaux de cette manière, l'Etat incite chaque entreprise à un comportement efficace.

Il faut remarquer cependant que la fixation du schéma fiscal optimal est fortement conditionnée par l'information dont dispose la puissance publique : il faut, d'après les équations précédentes, que la puissance publique soit en mesure de calculer $\gamma(q^*)$ ou de manière équivalente, qu'elle puisse résoudre l'équation de BLS associée au problème.

Par ailleurs, taxe et subvention apparaissent comme instruments substituts au sens où un niveau élevé de la taxe implique un niveau faible de la subvention. Pour $\alpha = 0$, on obtient l'application du seul principe « pollueur-payeur » et le niveau de taxe doit être égal au coût marginal de dépollution, c'est-à-dire à l'optimum exactement égal à la valeur de la perte de bien-être associée à une pollution supplémentaire. Au contraire le choix d'une subvention élevée implique un niveau de taxe faible. De manière schématique on voit que le dosage entre les différents paramètres fiscaux induit une répartition différente du surplus dégagé par rapport à la situation initiale : la taxation se fait au détriment des entreprises, la subvention à son profit.

Externalités et droits de propriété

Une autre façon d'interpréter cet effet redistributif consiste à considérer la situation initiale (pollution maximale) comme une configuration dans laquelle les droits de propriété sur un bien, l'environnement, font défaut. Si l'on spécifie, par exemple, que l'environnement « appartient » de plein droit aux consommateurs, alors ceux-ci sont en mesure de « monnayer » l'usage de cet environnement comme réceptacle à déchets. La taxe s'interprète ici comme le prix de cet usage. Au contraire, si l'on spécifie que l'environnement « appartient » au secteur productif, celui-ci est en mesure de « vendre » la qualité de l'eau, et c'est la subvention qui joue ce rôle. Certains auteurs (...) affirment que le problème des externalités est en fait causé par l'absence de droits de propriété clairement définis sur certains biens. Si le comportement d'un agent influence le bien-être d'un autre sans qu'il y ait transaction, c'est que la victime ne peut pas institutionnellement faire valoir un droit à « ne pas être gêné » ce qui peut dans de nombreux cas se traduire par un droit sur la propriété du « vecteur » de l'externalité : l'air, l'eau, le paysage...

Reprenons l'exemple des entreprises au bord du lac. Supposons que les consommateurs sont représentés par la puissance publique et généralisons l'idée de droit de propriété sur l'environnement de la façon suivante. La ressource environnementale est caractérisée, *ex ante*, avant toute intervention, par une eau pure de qualité $\bar{y}$. Polluer revient à consommer ce capital initial, à en affecter une partie à l'activité industrielle. Partager le droit de propriété sur l'eau revient à répartir $\bar{y}$ entre les entreprises et les consommateurs et à faire de cette répartition l'allocation initiale de l'économie. Notons q_j^0 la part de la propriété qui revient à la firme j. Cela veut simplement dire que la firme j a un droit initial de pollution justement égal à q_j^0. Il en résulte alors en procédant de même pour toutes les entreprises, que la part qui revient au consommateur est $\bar{y} - \sum_j q_j^0$. Nous sommes alors en présence d'une économie où le bien « environnement » fait l'objet de dotations initiales comme tout autre bien de l'économie.

Imaginons alors le résultat d'un mécanisme de marché où les agents échangent leurs droit d'usage (c'est-à-dire ici de propriété) sur l'environnement.

Soit p le prix d'une unité (qui correspond, compte tenu des hypothèses, à une unité de pollution) de ce bien « environnement ». La variation de bien être des consommateurs lorsqu'on passe de la situation initiale à une situation où la pollution totale est égale à q vaut :

$$S = \Phi(\bar{y} - q) - \Phi(\bar{y} - q_0) + p(q - q_0)$$

La variation de profit de l'entreprise j :

$$S_j = p(q_j^0 - q_j) - \int_{q_j}^{q_j^0} \gamma_j(s)ds$$

La maximisation des ces deux grandeurs donnent les fonctions d'offre et de demande de droit d'usage de l'environnement dans cette économie fictive :

$$\begin{cases} \Pi(\bar{y} - q) = p \\ \gamma_j(q_j) = p \end{cases}$$

Les consommateurs émettent une demande d'environnement telle qu'il y ait égalité entre prix et consentement marginal global à payer. Les firmes, elles, arbitrent entre les économies qu'elles peuvent faire en terme de dépollution et le prix d'usage de l'environnement, leur demande d'environnement est telle qu'il y a égalité entre le prix associé à l'usage de l'environnement et le coût marginal de dépollution.

L'équilibre concurrentiel de ce marché débouche alors sur l'allocation efficace du paragraphe précédent :

$$\begin{cases} q = q^* \\ p = \gamma(q^*) = \gamma_j(q_j^*) = \Pi(\bar{y} - q^*) \end{cases}$$

Par rapport à la situation initiale sans droit de propriété, la répartition du surplus total est donnée par :

- pour les consommateurs : $S = \Phi(\bar{y} - q^*) + p(q^* - q_0)$
- pour les producteurs : $S_j = p(q_j^0 - q_j^*) - \int_{q_j^0}^{q_j^*} \gamma_j(s)ds$

La répartition des droits initiaux est en fait équivalente à une répartition *ex post* du surplus par rapport à la situation sans droits. Si par exemple on impose $q_j^0 = q_j^*$, ce qui revient, dans l'économie fictive, à « privatiser » le lac au profit des entreprises, tout se passe comme si dans l'économie réelle on subventionnait les entreprises pour qu'elles dépolluent. Si au contraire on suppose que $q_j^0 = 0$, ce qui revient à « communaliser » le lac, le résultat est équivalent à la taxation de la pollution.

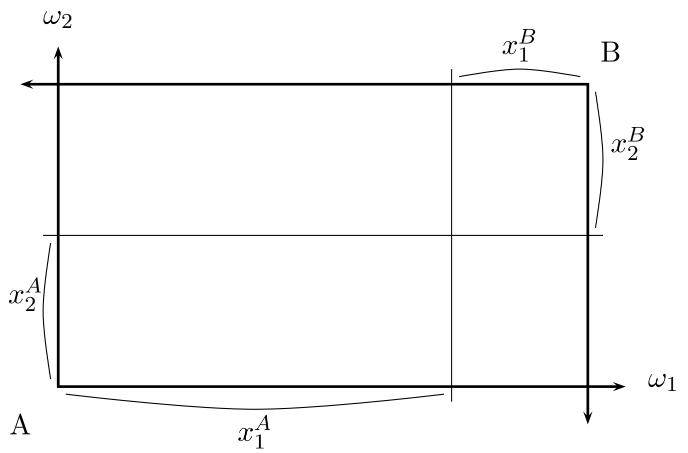
Marché de droits à polluer

Comment mettre en œuvre, dans l'économie réelle, la distribution des droits de propriété initiale ? Clairement, tout repose sur la création d'un nouveau bien « droit d'usage d'une unité d'environnement » échangé sur un marché. Compte tenu de la « technologie linéaire » de pollution, c'est équivalent à créer un marché des droits à polluer. Une unité de ce nouveau bien donne droit à son détenteur à déverser une unité de déchets dans le lac. La section précédente peut alors être réinterprétée en terme de marché de droit. La distribution initiale des droits à polluer correspond à la distribution initiale des droits de propriété sur l'environnement. On voit alors que la répartition finale du surplus résultant de la baisse de pollution dépend crucialement de la répartition initiale des droits. Remarquons enfin que l'efficacité de ces instruments repose aussi sur la capacité de l'Etat à se substituer à l'ensemble des consommateurs en émettant un consentement marginal à payer la qualité égal à la somme des consentements individuels. Si l'Etat n'est pas en mesure de calculer ce consentement social, alors le problème d'externalité se double d'un problème de bien (ici plutôt de mal) public.

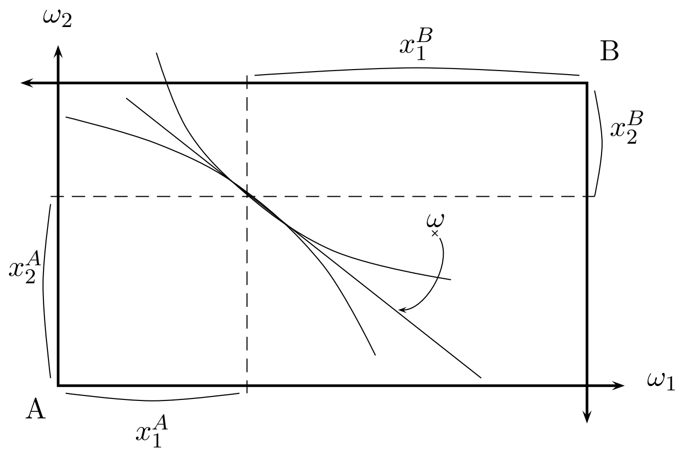
3.5 Modèles de Taxation

3.5.1 Le deuxième théorème : Une dichotomie entre efficacité et équité

Le deuxième théorème de l'économie normative nous apprend que l'on peut obtenir n'importe quelle allocation efficace au sens de Pareto, autrement dit n'importe quelle allocation sans gaspillage, comme résultat d'un équilibre concurrentiel à condition d'opérer, *ex ante*, une redistribution adéquate des ressources initiales. Selon ce théorème, il n'existe pas intrinsèquement d'incompatibilité entre des objectifs d'efficacité et des objectifs d'équité ou de redistribution : si, pour une raison ou une autre, la collectivité n'est pas satisfaite du résultat de l'équilibre concurrentiel, si elle trouve par exemple qu'il y a trop d'inégalité de niveaux de vie, alors une simple redistribution des ressources initiales permet de redresser les choses tout en étant certain que cette procédure n'affectera pas l'efficacité du système. On peut illustrer très simplement ce théorème à l'aide d'une boîte d'Edgeworth avec deux biens [1] et [2] et deux consommateurs A et B. Chaque agent dispose de dotation initiales en biens 1 et 2 : $\omega^i = (\omega_1^i, \omega_2^i)$ et échange sur un marché selon un processus concurrentiel. On raconte alors la petite histoire suivante : pendant la semaine chaque agent produit son panier de ressources initiale ω^i en travaillant par exemple dans ses champs. Le dimanche, tous les agents se retrouvent sur la place du village et échangent leurs productions. Si l'on pose $\omega = \omega^A + \omega^B$, une allocation réalisable des ressources $x^A = (x_1^A, x_2^A)$, $x^B = (x_1^B, x_2^B)$ vérifiera $x^A + x^B = \omega$. Une allocation réalisable est représentée par un point dans le rectangle de cotés ω_1, ω_2.



Dans ces conditions une allocation efficace est un point de la boîte d'Edgeworth où les deux courbes d'indifférence des deux agents sont tangentes. Ce point est obtenu comme équilibre concurrentiel pour peu que l'allocation initiale soit sur la (une) droite tangente commune aux deux courbes d'indifférence. Le deuxième théorème dit simplement que si les ressources initiales ne sont pas sur cette droite il suffit que l'Etat redistribue (flèche courbe sur le graphique) de manière à faire en sorte que la « nouvelle » allocation initiale soit sur cette droite.



Ce deuxième théorème a une vertu essentielle : Il dit que la redistribution initiale n'a pas besoin de se soucier d'efficacité, c'est le marché qui, une fois la redistribution initiale faite, ajustera l'allocation de manière efficace. Pourquoi y-a-t-il cette dichotomie entre efficacité et redistribution ? Tout simplement parce que nous avons une hypothèse sous-jacente selon laquelle la redistribution des ressources initiales n'affecte pas « la production » de ces ressources initiales par les agents.

Un problème d'information

Si l'on suppose, avec un peu plus de réalisme, que la production des ressources initiales correspond à un processus volontaire de chacun des agents, alors la politique de redistribution a une incidence sur les comportements. L'étendue de cette modification de comportement dépend crucialement de l'information dont dispose l'Etat et, par la même, de la forme de l'instrument fiscal de redistribution. Précisons ce point.

Tout d'abord, pour tenir compte de la rétroaction de la politique de redistribution sur « la production », il faut rajouter un bien (par exemple le travail ou l'effort) dans le modèle ci-dessus, et incorporer l'arbitrage individuel entre travail et consommation. Dans ces conditions, examinons l'incidence d'une politique de redistribution sur le comportement des agents. Plaçons nous, par exemple, dans le cas de la boîte d'Edgeworth ci-dessus. Sans taxation on voit que A est plus productif que B (au moins en bien 1). De deux choses l'une,

- ou bien l'Etat sait que A est plus productif et a les moyens de le prouver
- ou bien l'Etat ne peut qu'observer les ressources initiales et ne peut donc mettre en place qu'une formule de taxation fonction explicite du revenu.

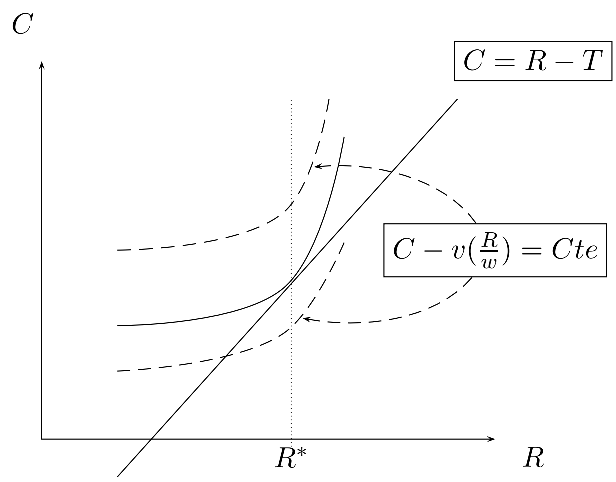
Dans le premier cas l'Etat peut imposer (!) une redistribution *nominative*. Schématiquement l'Etat pourra dire : « je sais que A est plus productif, je prélève donc une quantité forfaitaire (indépendante de son vrai revenu) sur son panier initial, quantité que je redistribue à B ». Dans ces conditions A va modifier son comportement de production mais cette modification n'est pas, en fait, préjudiciable à l'efficacité : il va simplement ajuster son travail en fonction de son arbitrage individuel entre loisir et consommation. En particulier il est tout a fait vraisemblable que A *ait intérêt à augmenter son activité de production pour compenser le prélèvement qu'il doit subir*. Dans ce cas l'impôt (forfaitaire) est plutôt incitatif, au sens où il induit les agent à augmenter leur activité productrice. Il s'agit de la traduction du classique effet de revenu de la micro-économie.

Dans le second cas, lorsque l'Etat n'observe que le revenu, il n'est plus possible de proposer un impôt nominatif. La seule possibilité consiste à afficher un barême qui donne le montant de l'impôt (positif ou négatif) en fonction du *revenu initial*. L'Etat ne peut plus dire : « je sais que A est plus productif donc je peux lui prélever une partie de son revenu », il peut seulement affirmer « je prélèverai au plus riche pour donner au plus pauvre » et cette nuance est cruciale. En effet l'arbitrage de A n'est plus du tout le même que précédemment. La question essentielle pour A est de savoir si *l'effort de production incrémental* entre un faible revenu et un fort revenu avant impôt est correctement rémunéré compte tenu du barême de redistribution. Une autre façon, plus caricaturale, de décrire cet arbitrage consiste à dire que la question pour A est de savoir s'il ne vaut mieux pas « être pauvre » et bénéficier des subventions plutôt que « d'être riche » et se faire taxer. L'impôt a ici un effet clairement désincitatif (qui correspond au traditionnel effet de substitution de la micro-économie) et l'on pressent que le résultat sera inefficace au sens de Pareto dans l'économie à trois bien. Dans ce second cas de figure il n'y a donc plus de dichotomie entre l'objectif d'efficacité et celui d'équité.

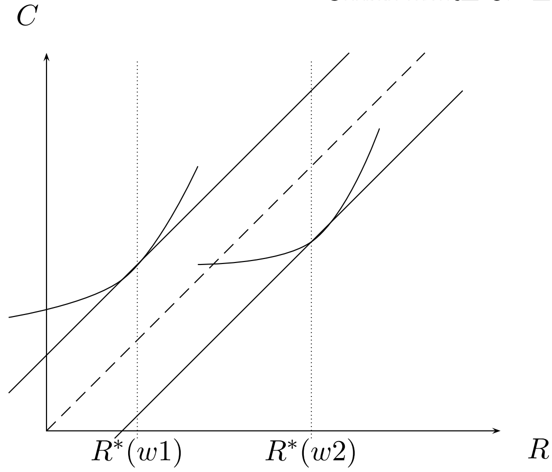
3.5.2 Un modèle simple à deux biens

Dans ce modèle, nous supposons qu'il n'y a pas du tout d'effet de revenu. Une taxation nominative forfaitaire ne modifie pas le comportement d'offre de travail de la part des agents. Ici, tous les agents sont identiques et arbitrent entre consommation et travail selon la fonction d'utilité $u(C, L) = C - v(L)$ où v est une fonction croissante convexe. Les agents diffèrent par leur productivité w. Autrement dit, un agent de type w obtient un revenu brut $R = wL$ s'il travaille L. Le revenu brut $R^*(w)$ d'un individu de type w auquel on prélève une taxe forfaitaire T ne dépend pas de T. $R^*(w)$ est en effet solution de :

$$\max \left(R - T - v\left(\frac{R}{w}\right)\right)$$



Supposons par exemple qu'il y a deux types d'agents avec $w1 < w2$. Soient T_1 et T_2 le montant des taxes forfaitaires que l'Etat impose sur chacun des deux agents. Compte tenu de la convexité de v on a nécessairement $R^*(w1)(\equiv R_1^*) < R^*(w2)(\equiv R_2^*)$. Sur le graphique suivant on a représenté la situation pour deux valeurs particulières de T_1 et T_2.



Du fait de l'absence d'effet de revenu, on a ici un résultat particulièrement simple. En fonction de la taxe T_i, l'allocation finale $(R_i^*, R_i^* - T_i)$ se déplace, pour chacun des agents, sur la droite verticale $R = R_i^*$. Si par exemple, à budget constant, on veut augmenter la taxe sur le plus productif au profit du moins productif (redistribution dans un sens « normal ») on déplace l'allocation de 2 vers le bas tandis qu'on fait monter l'allocation de 1. Jusque là la redistribution n'est en rien préjudiciable à l'efficacité puisque le revenu brut total reste inchangé. L'allocation qui en résulte est Pareto efficace.

On peut se poser alors la question de savoir si une telle allocation peut être obtenue lorsque l'information est incomplète, c'est-à-dire lorsque l'Etat est dans l'incapacité d'observer la productivité individuelle. Une solution évidente consiste alors à proposer (au lieu d'une taxation forfaitaire) un barême d'impôt qui donne le montant prélevé en fonction du revenu observé. Peut-on obtenir l'allocation précédente (efficace) à l'aide d'un barème d'impôt bien calculé ?

Prenons l'allocation correspondant aux taxes forfaitaires T_1 et T_2. Supposons que cette allocation puisse être obtenue par l'Etat au moyen d'un barème d'impôt du type $T = \tau(R)$. Cela impose en particulier que $T_i = \tau(R_i^*)$ et que chaque agent, devant le barème d'impôt, choisisse une offre de travail compatible avec R_i^* :

$$R_i^* = \arg\max_R \{R - \tau(R) - v\left(\frac{R}{w_i}\right)\}$$

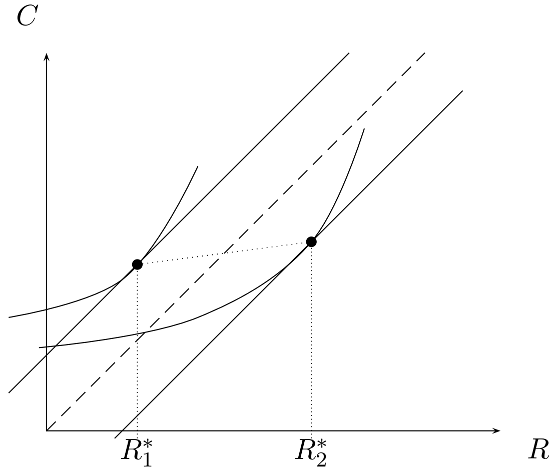
Ceci impose en particulier que $R_i^* - T_i - v\left(\frac{R_i^*}{w_i}\right) \geq R_j^* - T_j - v\left(\frac{R_j^*}{w_i}\right)$ que l'on peut réécrire pour $i = 2$ et $j = 1$:

$$T_2 - T_1 \leq R_2^* - R_1^* - \left(v\left(\frac{R_2^*}{w_2}\right) - v\left(\frac{R_1^*}{w_2}\right)\right)$$

que l'on peut écrire aussi :

$$\frac{\tau(R_2^*) - \tau(R_1^*)}{R_2^* - R_1^*} \leq 1 - \frac{\left(v\left(\frac{R_2^*}{w_2}\right) - v\left(\frac{R_1^*}{w_2}\right)\right)}{R_2^* - R_1^*}$$

Pour que l'allocation efficace puisse être obtenue par un barème d'imposition il faut donc en particulier que le taux « incrémental » (membre de gauche de l'inégalité ci-dessus) attaché à la variation de revenu ne soit pas trop grand. C'est l'effet de substitution évoqué plus haut : la redistribution est limitée par l'effet désincitatif du barème d'impôt. On peut visualiser facilement cet effet désincitatif. Supposons que l'on veuille opérer une forte redistribution entre 1 et 2. Les allocation désirées sont représentées sur le graphique suivant. On voit alors que le taux incrémental d'imposition est trop grand : l'individu de type 2 préfère l'allocation $(R_1^*, R_1^* - T_1)$ à l'allocation $(R_2^*, R_2^* - T_2)$, le surcroît d'effort de production n'est pas compensé par l'augmentation du revenu net.



Ce modèle simple contient tous les ingrédients essentiels pour mettre en évidence l'aspect désincitatif associé à un barème d'impôt : en liant fonctionnellement montant prélevé et revenu observé, un barème d'impôt introduit une distorsion dans l'arbitrage « loisir-consommation ». Devant un barème d'impôt de type $T = \tau(R)$, un individu de type w choisira une offre de travail qui lui permette d'obtenir un revenu brut vérifiant :

$$R_I(w) = \arg\max \left(R - \tau(R) - v\left(\frac{R}{w}\right)\right)$$

c'est-à-dire solution de :

$$v'\left(\frac{R_I(w)}{w}\right) = w(1 - \tau'(R_I(w))$$

Alors que devant un impôt forfaitaire, le même individu choisira le revenu $R^*(w)$ qui vérifie :

$$v'\left(\frac{R^*(w)}{w}\right) = w$$

Du fait de la convexité de v on a bien sûr : $R_I(w) < R^*(w)$.

C'est cet effet qui rompt la dichotomie entre redistribution et efficacité. C'est ce même effet qui fait dire que « l'impôt tue l'impôt ».

3.5.3 Un modèle continu

L'effet désincitatif limite d'une certaine manière les marges de manœuvre en terme de redistribution. Cet effet introduit la nécessité d'un arbitrage entre efficacité et amplitude de redistribution. Un modèle continu permet de mettre en évidence les principaux enjeux liés à cet arbitrage. On prend ici un modèle légèrement différent de celui présenté dans la section précédente : l'utilité d'un individu de type w pour un revenu R et une consommation C s'écrit : $u(C, R, w) = C - E(R, w)$. Pour obtenir le revenu R, un individu de type w, doit développer un effort coûteux qui est équivalent à une diminution de consommation $E(R, w)$, avec $\frac{\partial E}{\partial R}(R, w) \underset{déf}{=} E_1(R, w) > 0$, $\frac{\partial E}{\partial w}(R, w) \underset{déf}{=} E_2(R, w) < 0$, $\frac{\partial^2 E}{\partial w \partial R}(R, w) \underset{déf}{=} E_{12}(R, w) < 0$. On suppose par ailleurs que w est distribué sur le segment $[\check{w}, +\infty[$ avec une densité $f(\cdot)$, de cumulative $F(\cdot)$. L'objectif redistributif de l'Etat est résumé par une fonction de bien-être collectif qui est défini par une fonction U concave de sorte que :

$$W = \int_{\breve{w}}^{+\infty} U(C-E)dw$$

Supposons que l'Etat fixe un barème d'impôt sur le revenu de la forme $T = \tau(R)$. Chaque consommateur de type w ajuste alors son revenu de manière à maximiser son utilité :

$$R(w) = \arg\max\{R - \tau(R) - E(R,w)\}$$

Soit alors $T(w)$ le niveau de taxe correspondant : $T(w) \underset{déf}{=} \tau(R(w))$;

Notons $Z(w)$ le revenu « net-net » de l'individu de type w : $Z(w) = R(w) - T(w) - E(R(w),w)$.

Par le théorème de l'enveloppe, on a : $\dot{Z}(w) = -E_2(R(w),w)$ *ppw* Le produit fiscal s'exprime alors de la manière suivante :

$$T = \int_{\breve{w}}^{+\infty} (R(w) - E(R(w),w) - Z(w))f(w)dw$$

Le Bien-être collectif est égal à :

$$W = \int_{\breve{w}}^{+\infty} U(Z(w))dw$$

Le programme d'optimisation s'écrit alors, en notant λ le coût d'opportunité des fonds publics :

$$\begin{cases} \max\limits_{R(\cdot),Z(\cdot)} W + \lambda T \\ \dot{Z}(w) = E_2(R(w),w) \end{cases}$$

Une application directe des équations d'Euler Lagrange donne les conditions suivantes :

$$\begin{cases} -E_{12}\frac{1}{\lambda}\int_w^{+\infty} U'(Z(s))ds + ((1-E_1)f(w) + E_{12})(1-F(w)) = 0 \\ \frac{1}{\lambda}\int_{\breve{w}}^{+\infty} U'(Z(s))ds = 1 \end{cases}$$

Posons : $1-\varphi_\tau(w) = \frac{1}{\lambda}\int_w^{+\infty} U'(Z(s))ds$. On peut interpréter $\varphi(w)$ comme la valeur sociale marginale d'une unité de revenu distribué aux individu de productivité inférieure à w. Les conditions d'optimalité s'écrivent alors :

$$\frac{1-E_1(R(w),w)}{E_1(R(w),w)} = -\frac{wE_{12}(R(w),w)}{E_1(R(w),w)}\frac{(1-F(w))}{wf(w)}\frac{\varphi_\tau(w) - F(w)}{1-F(w)}$$

Cette équation mérite un commentaire. Rappelons tout d'abord que la condition du premier ordre du programme maximisation du consommateur s'écrit :

$$R(w) = \arg\max\{R - \tau(R) - E(R,w)\} \Rightarrow \tau'(R(w)) = 1 - E_1(R(w),w)$$

Ainsi le membre de gauche de l'égalité est égal à $\frac{\tau'}{1-\tau'}$, c'est-à-dire le montant d'impôt supplémentaire lorsque le revenu net augmente de 1. Ce ratio mesure en quelque sorte le taux marginal « net » d'imposition : taux marginal d'impôt par rapport au revenu net.

Le second membre de l'équation peut se décomposer en trois termes distincts :

- $-\frac{wE_{12}(R(w),w)}{E_1(R(w),w)}$ peut aussi s'écrire : $-\frac{w}{E_1}\frac{\partial E_1}{\partial w} \equiv \epsilon^*(w)$ qui mesure l'élasticité de l'effort marginal par rapport à la productivité. Si cette élasticité est faible, cela signifie que l'effort marginal pour augmenter son revenu varie peu avec w. On peut relier cette élasticité à l'offre de travail lorsque E s'écrit $E(R,w) \equiv v(\frac{R}{w}) \equiv v(L)$. Dans ce cas l'offre de travail (sans impôt) est égale à $\arg\max(wL - v(L))$, et son élasticité à w est égale à $\epsilon_L(w) = \frac{v'(L)}{Lv''(L)}$. On vérifie aisément qu'alors : $\epsilon^* = 1 + \frac{1}{\epsilon}$. Ainsi, plus l'élasticité de l'offre de travail est grande plus le taux marginal d'imposition doit être petit. Le taux marginal d'imposition doit être diminué pour les sous-groupes de population pour lesquels on pense que la taxe est une forte incitation à la réduction de l'offre de travail.

• Le second terme est l'inverse de ce que l'on appelle le taux de risque de la distribution des productivités. Le taux marginal d'imposition pour un revenu donné, doit être d'autant plus élevé qu'il y a une grande proportion d'individus ayant un revenu plus grand et au contraire très peu d'individus ayant ce revenu précis. Cet effet est parfaitement compréhensible de la manière suivante : objectif de redistribution mis à part, une augmentation du taux marginal d'imposition sur un tranche intermédiaire de revenu augmente mécaniquement les recettes fiscales sur les revenus plus élevés mais, par effet désincitatif, les diminue sur les revenus de la tranche concernée.

• Le troisième terme résume le motif de redistribution. Dire que φ est plus grand que F signifie simplement que le poids « social » des individus ayant une faible productivité est plus grand que leur poids réel dans la population. Ainsi, plus la volonté de redistribution est forte (φ élevé) plus le taux marginal d'imposition doit être fort (toutes autres choses égales par ailleurs).

Cette formule nous permet de discuter de certains points sur la progressivité de l'impôt. L'impôt sera dit progressif lorsque le taux marginal d'imposition est croissant avec le revenu. Le troisième terme (redistributif) peut se réécrire : $\left(1 - \frac{1-\varphi}{1-F}\right)$, c'est-à-dire 1 moins la moyenne des utilités marginales sociales du revenu pour l'ensemble des individus ayant une productivité supérieure à w. Ce terme est croissant lorsqu'il y a une forte volonté redistributive : l'utilité marginale sociale du revenu est décroissante avec la productivité. Ce terme plaide, dans les cas normaux de volonté redistributive des riches vers les pauvres, pour une progressivité de l'impôt.

Le second terme est plus problématique. Pour une distribution (par exemple uniforme) sur un intervalle ce terme est très souvent décroissant et égal à zéro pour la productivité limite supérieure. Un taux marginal d'imposition nul pour les haut revenus est un résultat qui s'interprète typiquement en termes d'incitations et correspond au résultat que nous avons mis en évidence dans le cas de deux agents. Notons qu'un impôt dégressif n'est pas contradictoire avec une volonté redistributive des hauts revenus vers les bas revenus. Par exemple le barème d'impôt peut comporter une composante négative fixe (revenu fixe redistribué à tout le monde) et une composante marginale décroissante : $\tau(R) = -B + j(R)$, avec j' décroissant. Pour des distributions infinies, tous les cas peuvent se présenter, on a pas nécessairement monotonie du taux de risque et l'analyse doit se faire au cas par cas. Le tableau suivant donne les valeurs des taux marginaux d'imposition optimaux pour une distribution lognormale de w et différents objectifs de redistribution. Il faut noter dans ce cas que la distribution lognormale $\frac{1-F}{wf}$ décroît et tend vers zéro à l'infini. On parle d'objectif Rawlsien lorsque seul le poids des plus défavorisés est pris en compte dans la fonction objectif (ici les 15% les plus pauvres), et d'objectif de type « Gini » lorsque le « poids » de chaque individu décroît comme $1 - F$. L'élasticité de l'offre de travail est prise égale à 0,3.

Percentiles de la distribution de w	Objectif Rawlsien	Objectif de type « Gini »
Médiane	84,4%	73%
Quartile supérieur	77,4%	71,9%
Décile supérieur	71,2%	66,7%
95%	67,2%	66,7%
Centile supérieur	62%	61,7%
99,9%	56,3%	56,2%

Chapitre 4

Economie Industrielle

Introduction

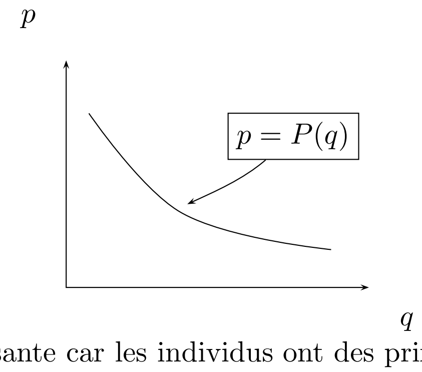
L'économie industrielle est le domaine qui étudie les comportements stratégiques des entreprises. Il n'y a pas réellement de théorie générale, mais un véritable florilège de petits modèles traités au cas par cas. L'ouvrage de référence sur la question est *The Theory of Industrial Organisation*, écrit par Jean TIROLE. Ce chapitre tâche d'en donner un aperçu et de vous inciter à le lire dans sa version originale[1].

4.1 Rappels sur le monopole

4.1.1 Monopole simple

On considère ici une entreprise commercialisant un seul produit, en situation de monopole.

- La fonction de demande des consommateurs pour le produit est notée $D(p)$; la fonction de demande inverse est notée $P(q)$. Rappelons qu'il est d'usage de mettre les prix en ordonnée et les quantités en abscisse :



  Cette fonction est décroissante car les individus ont des prix plafonds.
- On note par ailleurs $C(q)$, la fonction de coût pour l'entreprise.

Le monopole est dit *price-maker*. Son problème est de trouver le prix p qui maximise son profit. Son programme s'écrit :

$$\max_p \{pD(p) - C(D(p))\} \Leftrightarrow \max_q \{P(q)q - C(q)\}$$

La condition du premier ordre associée est :

[1] évitez la traduction *Economica*, la mise en page suinte la médiocrité.

$$D(p) + pD'(p) = C'(D(p)) \times D'(p)$$

Ce qui se réécrit :

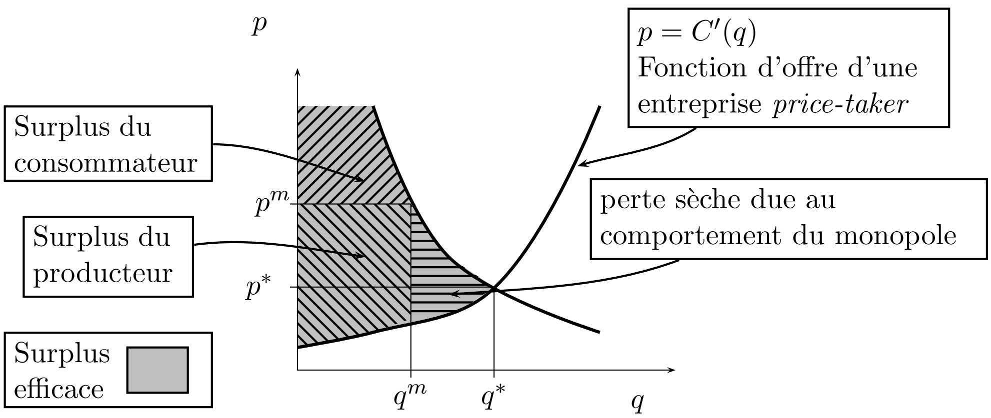
$$p - C'(D(p)) = -\frac{D(p)}{D'(p)}$$

Ou encore :

$$\underbrace{\frac{p - C'(D(p))}{p}}_{\text{indice de Lerner}} = \frac{D(p)}{pD'(p)} = \frac{1}{\varepsilon}$$

L'indice de Lerner représente la marge qui est réalisée sur la dernière unité produite et ε, l'indice d'élasticité-prix, correspond à la variation de demande subséquente à une augmentation de prix de 1%.

Si $\varepsilon \neq +\infty$, le prix p est supérieur au coût marginal et le monopole s'éloigne de l'optimum[2]. Cela correspond à des rigidités de demande qui se constatent notamment sur les biens de première nécessité (par exemple la demande d'essence est assez inélastique). Si $\frac{1}{\varepsilon} = 0$, alors la demande est très réactive et le prix de monopole ne s'éloigne pas du coût marginal. La perte d'efficacité est représentée sur le schéma suivant :



Il est à noter que beaucoup d'études ont été réalisées pour estimer l'importance du triangle de perte sèche.

4.1.2 Raffinements

Généralisation multiproduits

Cette fois-ci, $p, q \in \mathbb{R}^n$ et on indice par i les demandes des différents biens et les coûts. Le programme de l'entreprise s'écrit :

$$\max_p \{\sum_i p_i D_i(p) - C_i(D_i(p))\}$$

On suppose qu'il n'y a pas d'effet de gamme, c'est-à-dire que la fonction de coût d'un bien dépend uniquement de la demande en ce bien. En écrivant la condition du premier ordre et en faisant apparaître l'indice de Lerner, il vient :

$$\frac{p_i - C_i'}{p_i} = \frac{1}{\varepsilon_i} - \sum_{j \neq i} \frac{(p_j - C_j')}{p_i D_i} \frac{D_j \varepsilon_{ij}}{\varepsilon_i}$$

[2] A l'optimum, le prix est égal au coût marginal de production, ce qui se conçoit aisément.

ε_{ij} est l'élasticité croisée. Si $\varepsilon_{ij} > 0$, alors les biens sont dits substituts ($p_j \nearrow \Rightarrow D_i \nearrow$). Si $\varepsilon_{ij} < 0$ les biens sont dits compléments. On voit que le monopole doit avoir une structure de coordination des prix. En effet, si ses secteurs étaient autonomes, cela reviendrait à négliger le terme en j. Dans ce cas, si les biens sont substituts, un secteur autonome aura tendance à *pricer* trop haut et à l'inverse, si les biens sont compléments, le *pricing* sera trop bas.

Auto-concurrence

On suppose qu'il y a deux périodes numérotées 1,2. Nous allons tâcher d'effectuer une modélisation du phénomène d'auto-concurrence. On suppose une obsolescence des biens de deux périodes. Le coût de production est nul et les consommateurs valorisent l'utilisation d'un bien de $v \in [0,1]$ par période. La distribution des valorisations est prise uniforme. Le monopole cherche les prix optimaux pour les deux périodes. Nous allons distinguer deux cas.

Cas n ° 1 : On suppose que l'entreprise peut éditer un catalogue dans lequel elle renseigne sur les prix aux différentes périodes. Elle s'engage sur (p_1, p_2).

Quelle est alors la demande ? Raisonnons chronologiquement. Qui achète en période 1 ? Ceux pour lesquels le bénéfice d'acheter en période 1 est supérieur à celui d'acheter en période 2 ou de ne rien acheter du tout. Ce qui se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{lll} 2v - p_1 \geq v - p_2 & \Leftrightarrow & v \geq p_1 - p_2 \\ 2v - p_1 \geq 0 & \Leftrightarrow & v \geq \frac{p_1}{2} \end{array} \right.$$

$p_1 - p_2$ correspond au prix du bien en période 1 si on le revend en période 2. On remarque qu'on peut éliminer la seconde condition car $p_1 - p_2 \leq \frac{p_1}{2}$ n'est pas raisonnable. En effet, cela équivaut à $p_2 \geq \frac{p_1}{2}$ et le prix en deuxième période est trop élevé (s'il est acquis en seconde période, le bien ne sert qu'une période).

Qui achète en seconde période ? Les consommateurs dont le v vérifie :

$$\left\{ \begin{array}{l} v - p_2 \geq 2v - p_1 \\ v - p_2 \geq 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow v \in [p_2, p_1 - p_2]$$

Qui n'achète pas ? Ceux qui restent.

Le programme de maximisation s'écrit :

$$\max_{p_1, p_2} p_1(1 - p_1) + p_2((p_1 - p_2) - p_2)$$

La solution de ce programme est : $p_1 = 1$, $p_2 = \frac{1}{2}$. On a alors : $\pi^* = \frac{1}{2}$. On constate que personne n'achète en seconde période puisque $(p_1 - p_2) - p_2 = 0$. Il reste alors tous les consommateurs dont le v est inférieur à $\frac{1}{2}$ et le directeur marketing est tenté de proposer en seconde période un prix de $\frac{1}{4}$, ce qui va malheureusement à l'encontre de l'engagement initial.

Cas n ° 2 : Le monopole ne peut pas s'engager. On suppose alors que le consommateur anticipe le prix en période 2. On note p_2^a le prix conjecturé. On suppose que $p_2^a \leq \frac{p_1}{2}$. Raisonnons comme précédemment :

En première période, ceux dont le v est supérieur à $p_1 - p_2^a$ achètent. La demande résiduelle en période 2 se répartie alors uniformément sur $[0, p_1 - p_2^a]$ et le prix proposé p_2 optimal est alors $p_2 = \frac{p_1 - p_2^a}{2}$ (Cela résulte de $\max_{p_2} p_2(p_1 - p_2^a - p_2)$).

La condition d'anticipation rationnelle est $p_2 = p_2^a$, *id est* $p_2 = \frac{p_1}{3}$. Voilà modélisées les soldes.

Trouvons p_1 pour finir. En remplaçant p_2 par $\frac{2p_1}{3}$ dans le programme de maximisation, il vient :

$$\max_{p_1,p_2} p_1(1-p_1) + \frac{p_1}{3}\left(p_1 - \frac{2p_1}{3}\right)$$

dont les solutions sont : $p_1 = \frac{9}{10}$, $p_2 = \frac{3}{10}$. Le profit associé est : $\pi = \frac{9}{20} < \frac{1}{2}$.

C'est une situation d'auto-concurrence et le profit réalisé est moindre que celui du cas 1 avec engagement. La morale est la suivante : « On peut toujours s'engager à faire ce qu'on ferait si on ne pouvait pas s'engager. Cela n'engage à rien... »

Comment éviter l'auto-concurrence ? Louer périodiquement, créer une obsolescence technique forcée d'une période...

Il est à noter qu'un certain théorème nous assure que si le nombre de périodes est suffisamment grand, le prix sera nul, c'est-à-dire que la tarification se fera au coût marginal comme en concurrence.
Rem. : La clause du consommateur défavorisé consistant à rembourser la différence est une manière de s'engager. On pense volontiers que c'est fait à l'attention du consommateur mais la réalité est autre.

4.2 Discrimination

4.2.1 Les trois degrés de discrimination

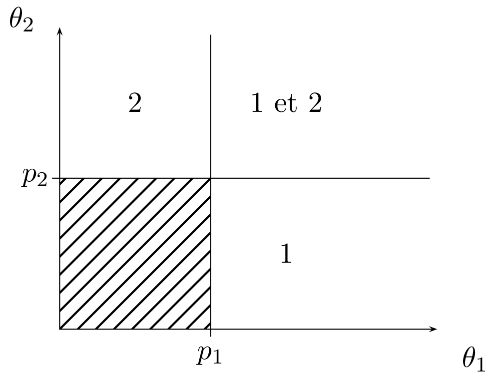
La discrimination consiste à adapter son prix au client. L'idée est d'être efficace comme la concurrence, mais de récupérer en outre tout le surplus. Il est trois degrés de discrimination.

- Premier degré : « A la tête du client ». Cela suppose une information démesurée. Ce cas n'est qu'anecdotique
- Troisième degré : Il consiste en une segmentation sur des critères observables. On classe par exemple les individus en fonction de leur revenu. Pour deux groupes par exemple, l'un va avoir une élasticité-prix de demande négligeable devant celle de l'autre, ce qui va se traduire par un prix plus élevé pour le premier. On remarque que pour que cela puisse fonctionner, il ne doit pas y avoir de marché secondaire. Pour éviter cela, les entreprises en situation de monopole procèdent à une intégration verticale des secteurs à forte élasticité, de sorte à ce que les secteurs à faible élasticité se retrouvent *squizzés* par la force des choses.
- Seconde degré : cf. cours d'auto-sélection et tarification non linéaire du marchand de vin. Le problème est que le choix n'est pas auto-sélectif. A l'évidence, le profit généré est moindre qu'en information complète. Il s'agit en fait d'éviter autant que faire se peut que les individus ayant un fort consentement à payer achètent les produits de mauvaise qualité.
  Cela peut aussi se manifester par des ventes liées (=par lots). Considérons par exemple Excel et Word, associons leur les temps respectifs de téléchargement t_1 et t_2. Si on télécharge les deux indépendamment, le temps qu'il nous faudra est $t_1 + t_2$. L'astuce de Microsoft consiste à faire des *packs*, c'est-à-dire mettre ensemble les deux logiciels, pour un temps de téléchargement inférieur à $t_1 + t_2$ puisqu'il est inutile de mettre les programmes espion en double. De la sorte, des personnes qui auraient téléchargé uniquement Excel vont être tentées par le téléchargement du *pack*, pensant avoir ultérieurement l'usage de Word et se retrouvent ainsi bien attrapées. Grrr...

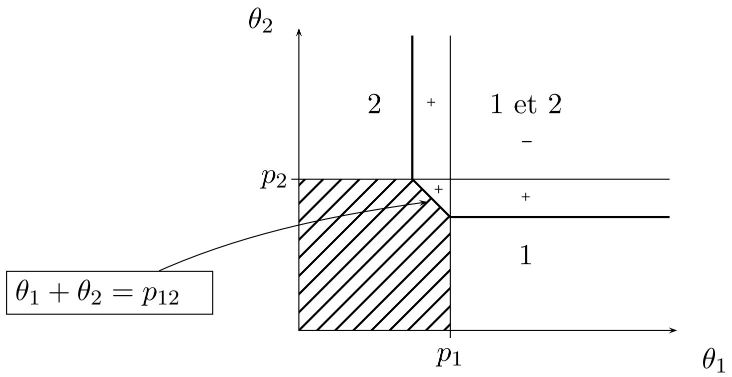
4.2.2 Un modèle

On se propose de préciser l'idée précédente de vente par lots à l'aide d'un modèle. On considère un monopole qui produit deux biens à coût marginal nul. Ces biens indivisibles sont notés 1 et 2. On a des individus demandeurs caractérisés par un consentement à payer $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ avec des notations évidentes. On suppose que $\theta \in I^2$, I intervalle de $\mathbb{R}^+$ est distribué selon une certaine densité dF.

Si le monopole propose les prix p_1 et p_2, on a représenté sur le schéma ci-dessous ce qu'achètent les consommateurs selon leurs consentement à payer.



Que se passe-t-il lorsqu'on baisse les prix avec la réalisation de *packages* c'est-à-dire qu'on propose $p_{12} < p_1 + p_2$



Il apparaît que les personnes achetant initialement 1 et 2 continuent d'acheter 1 et 2 mais au prix $p_{12} < p_1 + p_2$. D'où un effet négatif $(-)$ sur la recette. A cet effet s'oppose un effet positif sur la recette $(+)$ des individus qui n'achetaient qu'un seul produit et qui maintenant achètent les deux et des individus qui avant n'achetaient rien.

Intuitivement, pour que l'effet $(+)$ soit plus important que l'effet $(-)$, et donc que l'opération soit de bon aloi, θ_1 et θ_2 doivent être corrélés négativement. Notamment, il doit y avoir peu de personnes ayant θ_2 et θ_1 importants.

4.3 Relations verticales

On étudie ici des monopoles enchaînés.

$$\begin{array}{c} c \\ \boxed{M_1} \\ \Big\downarrow \; w \text{ (wholesale)} \\ \boxed{M_2} \\ \Big\downarrow \; p \text{ (resale)} \\ \boxed{\text{Demande}} \end{array}$$

Par exemple, il peut s'agir de la production concentrée géographiquement et de la distribution plus largement étendue.

4.3.1 Le problème de la double marginalisation

Prenons une fonction de demande simple : $D(p) = 1 - p$. On suppose bien sûr $c < 1$. M_1 joue w et M_2 réagit en fixant p. Il convient de raisonner par *backward induction*. C'est un jeu dont on cherche les équilibres Nash-parfaits. w étant donné, le programme de maximisation de M_2 s'écrit :

$$\max_p \underbrace{(p-w)}_{\text{marge unitaire}} D(p)$$

Remarque : $w \neq c$, i.e. le prix obtenu est différent de celui qui serait obtenu si M_1 était seul. On note $p^m = \arg\max_p (p-c)D(p)$, le prix du monopole intégré.

On pose : $\Pi(w) = \max_p (p-w)D(p)$

Le théorème de l'enveloppe nous assure alors que :

$$\Pi' = \frac{\partial}{\partial w}(p-w)D(p) = -D(p) \rightsquigarrow \text{croissant en } w$$

Dès lors, on conjecture[3] un prix supérieur à p^m.

On a[4] : $\arg\max_p (p-w)(1-p) = \frac{1+w}{2}$

On peut maintenant écrire le programme de maximisation de M_1 compte-tenu de la réponse de M_2 à un prix de gros w.

$$\max_w (w-c)D\left(\frac{1+w}{2}\right) = \max_w (w-c)\left(1 - \frac{1+w}{2}\right) = \max_w (w-c)\left(\frac{1-w}{2}\right)$$

Ce qui donne finalement $w = \frac{1+c}{2}$.
Par suite, $p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1+c}{2}\right)$ et on vérifie que $p > p^m = \frac{1+c}{2}$

In fine, le profit total des monopoles est inférieur à celui d'un monopole intégré. C'est le problème de la double marginalisation. Comment pallier un tel problème ?

[3] $w > c \Rightarrow D(p) < D(p^m) \Rightarrow p > p^m$

[4] $(p-w) + (1-p) = 1 - w$, à périmètre donné, la figure de surface maximale est le carré. On résout alors $p - w = 1 - p$. Il est ici inutile de dériver...

• Une première solution consiste à appliquer une franchise. Le monopole M_1 fait payer $wq + A$ à M_2. Comme A ne dépend pas de q, en prenant $w = c$, c'est-à-dire en effectuant une tarification au coût marginal, M_1 va donner la bonne incitation pour son programme de maximisation. En effet, il est à noter que :

$$\arg\max_p (p - c)D(p) - A = \arg\max_p (p - c)D(p) - \cancel{A} = p^m$$

En fixant alors A à $(p^m - c)D(p^m)$, on a $\Pi_2 = 0$ et M_1 récupère l'intégralité du profit de monopole intégré.

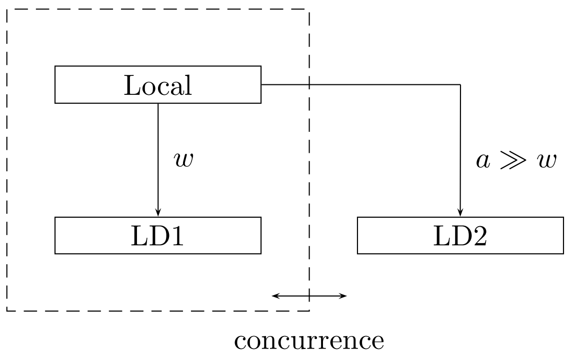
En pratique, A peut être le droit d'utilisation de la marque.

Ici, M_1 a le pouvoir de fixer w et M_2 celui de fixer p. Cependant, il arrive souvent que M_2 ait le double pouvoir de fixer w et p. C'est notamment le cas des chaînes de supermarché, qui grâce aux marges arrières[5] récupèrent le pouvoir sur w. Il est à noter que les marges arrières n'intervenaient pas dans le calcul des ventes à pertes qu'interdit la loi GALLAND, ce qui est à l'origine d'une récente polémique.

• Une seconde solution est la RPM[6]. Cela consiste en une fixation du prix en aval. M_1 impose $p \leq p^m$ et $w = p^m$. Ces pratiques sont prohibées en France depuis 1978. Cependant, certaines chaînes contournent cette interdiction à l'aide de magasins dépendant directement de la maison mère encadrant, c'est-à-dire fixant les prix, les magasins franchisés. Ce sont des *points of presence*. La preuve de l'efficacité des *points of presence* sur l'homogénéisation est l'adoption universelle de l'indice *Bigmac*. On peut compliquer le modèle en introduisant du risque moral en aval.

4.3.2 Compléments

Qu'est-ce que le *squizz* ?



Prenons l'exemple du secteur des télécommunications. A l'époque[7] , France Télécom avait le monopole sur le réseau local, mais en longue distance d'autres opérateurs avaient aussi un réseau. Pour que la concurrence soit possible, une comptabilité indépendante des réseaux locaux et nationaux a alors été mise en place. La stratégie de *squizzing* s'est manifestée par des charges d'accès au réseau local a et w fort différentes ($w \ll a$). Contre cette stratégie de *squizz*, l'organe de régulation des télécommunications a imposé des prix minimums à LD1 et il est amusant de constater que les concurrents en ont profité pour faire des comparaisons de tarifs dans leurs publicités.

[5]consistant par exemple à vendre le positionnement des produits dans les rayons

[6]*Resail Price Maintenance*

[7]Maintenant, avec le dégroupage total, il n'est plus nécessaire de s'embêter avec France Télécom.

4.4 L'Oligopole

On se pose la question de savoir comment modéliser la concurrence entre **deux** fabricants du même bien. On raconte à ce propos deux histoires. Pour le commun des mortels, la concurrence se manifeste par la guerre des prix. C'est ce qu'on imagine naturellement. Cependant, il y a une autre histoire : les entreprises peuvent mettre sur le marché des quantités données. Par exemple, des pêcheurs arrivent le matin avec leur poisson pour la vente à la criée. S'il y a peu de poisson, le prix sera élevé et s'il y en a beaucoup, le prix sera faible. Ici, la variable stratégique de chaque pêcheur est la quantité avec laquelle il va arriver[8].

4.4.1 Equilibre de Cournot

C'est l'équilibre résultant de la concurrence par les quantités. On suppose qu'il existe un mécanisme donnant le prix en fonction de la quantité (par exemple, la vente à la criée). On indice par i les acteurs et on note q_i leur variable stratégique de quantité, et C_i leur coût de production.

Le profit de l'entreprise i est donné par :

$$\Pi_i(q_i, q_{-i}) = P(\sum_j q_j)q_i - C_i(q_i)$$

L'équilibre de Nash lié à ce problème est appelé équilibre de Cournot. On note qu'un équilibre de Cournot (q_1^*, q_2^*) est tel que :

$$\begin{cases} \forall q_1 & \Pi_1(q_1^*, q_2^*) \geq \Pi_1(q_1, q_2^*) \\ \forall q_2 & \Pi_2(q_1^*, q_2^*) \geq \Pi_2(q_1^*, q_2) \end{cases}$$

On doit avoir : $q_i^* = \arg\max \Pi_i(q_i, q_{-i})$. La condition du 1$^{\text{er}}$ ordre associée est : $P(\sum q_j) + q_i P(\sum q_j) = C_i'(q_i)$.

Prenons par exemple :
- $D(p) = 1 - p$ (On a $P(q) = 1 - q$).
- $C_i(q) = c_i q,\ i = 1, 2$

On obtient alors l'équilibre de Nash : $q_i^* = \frac{1-2c_i+c_j}{3}$, et la quantité totale est $q_1^* + q_2^* = \frac{2-c_1-c2}{3}$.

Rem. : Même si elles n'ont pas le même coût marginal, les entreprises peuvent être toutes deux actives à l'équilibre, c'est-à-dire que même si $c_1 \gg c_2$, l'entreprise 1 produit. Ainsi, à l'équilibre de Cournot, il n'y a aucune raison d'avoir $C_1'(q_1^*) = C_2'(q_2^*) \rightsquigarrow$ c'est déjà une source d'inefficacité. Mais si 2 était en monopole, $q_{\text{monopole}} = \frac{1-c_2}{2} < q_1^* + q_2^*$: c'est inefficace mais cela donne lieu à une production plus importante que la production de monopole.

Rem. : Les profits d'équilibre sont non nuls.

4.4.2 Equilibre de Bertrand

L'équilibre de Bertrand est une concurrence en prix. On se donne deux entreprises produisant le même bien à des prix p_1 et p_2. On a très naturellement :

$$\begin{cases} p_1 < p_2 \Rightarrow & \begin{cases} D_1(p_1, p_2) = 1 - p_1 \\ D_2 = 0 \end{cases} \\ p_1 > p_2 \Rightarrow & \begin{cases} D_1 = 0 \\ D_2(p_1, p_2) = 1 - p_2 \end{cases} \\ p_1 = p_2 \Rightarrow & \left\{ D_1 = D_2 = \frac{1-p_1}{2} \right. \end{cases}$$

[8] Il y a aussi les agriculteurs qui déversent des fruits sur les routes, mais il est une part de mécontentement dans leur motivation.

Lorsque l'un des deux prix est plus avantageux, la demande se dirige sur l'entreprise affichant ce prix. Lorsque les deux prix sont égaux, les consommateurs tirent au sort le magasin dans lequel ils vont, avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

On note, c_1 et c_2 les coûts marginaux. On suppose dans un premier temps que $c_1 = c_2 = c$. On ne peut alors pas avoir $c < p_1 < p_2$, car si tel était le cas, 2 réviserait son prix p_2 avec $p_2' \in]c, p_1[$. Nécessairement, le seul équilibre de Nash pouvant exister est $p_1^* = p_2^* = c$. On l'appelle équilibre de Bertrand.
Si on suppose maintenant que $c_1 > c_2$, l'équilibre de Nash devient :

$$\begin{cases} p_2 = c_1 - \varepsilon \\ p_1 \geq c_1 \end{cases}$$

où ε est un porte-clefs. C'est une stratégie de prix limite. Cet équilibre n'est évidemment pas efficace car le *priçage* s'effectue au coût marginal le plus grand. Le profit est positif pour 2 et nul pour 1.

4.4.3 Synthèse d'Edgeworth : la réconciliation

On se pose maintenant la question de savoir quelle description est la bonne. En d'autres termes, peut-on appliquer le modèle de Bertrand aux poissons ? Non, car les bateaux ne sont pas extensibles. La capacité est coûteuse.

Précisons l'idée. Supposons que les coûts marginaux de production soient égaux : $c_1 = c_2 = c$. On imagine une guerre des prix, c'est-à-dire que chacun va proposer un prix entre le prix de l'autre et le coût marginal lors de sa révision et s'attribuer ainsi toute la demande l'espace d'un instant. A l'équilibre, chacun a la moitié de la demande pour un prix égal au coût marginal : $\frac{D(c)}{2}$. Mais au cours de la guerre des prix, la production a dû être supérieure à $\frac{D(c)}{2}$, et presque égale au double pour p_i proche de c[9]. Le problème est que le marché de la capacité est peu liquide ce qui est source d'irréversibilité. Les coûts d'investissement en capacité sont des *sunk-costs*.
In fine, lorsqu'on décrit un marché avec des *sunk-costs*, c'est l'histoire de Cournot que l'on raconte, et lorsqu'il n'y en a pas, c'est-à-dire lorsque les capacités sont aisément ajustables, on raconte celle de Bertrand.

Rem. : Avec un jeu en deux étapes, on peut expliquer un équilibre de Cournot avec une description de Bertrand. A l'étape première, les deux entreprises choisissent κ_1, κ_2 et paient c_0 pour participer. A l'étape seconde, elles fixent leurs prix p_1 et p_2 sachant qu'elles ont un coût marginal c.

4.4.4 La collusion

Les entreprises peuvent-elle mieux faire en s'entendant ?

A quoi bon baisser ses prix et sombrer dans la guerre des prix ? Pourquoi ne pas signer une sorte de contrat avec le concurrent ?
- 1 et 2 peuvent s'entendre sur $p_1 = p_2 = p^m$, prix de monopole et se partager $\frac{\Pi^m}{2}$. (anti-concurrentiel)
- Il peut aussi y avoir entre 1 et 2 une collusion tacite grâce à la répétition du jeu, sur le modèle du dilemme du prisonnier itéré et l'application d'une stratégie agressive.

[9] $p_i \approx c \Rightarrow D(p_i) \approx 2 \times \frac{D(c)}{2}$

Considérons qu'il y a une infinité de périodes. A chaque instant, 1 et 2 fixent p_1 et p_2. Notons que l'ensemble des stratégies est extrêmement compliqué. Exhibons un équilibre de Nash.

$$\begin{cases} \text{On joue } p^m \text{ tout le temps, avec un profit } \frac{\Pi^m}{2} \\ \text{Si jamais } i \text{ voit que } j \text{ a dévié, } p_i = c \ldots \textit{ ad vitam eternam.} \end{cases}$$

A-t-on intérêt dans ces conditions à dévier ?
Si je reste pacifique, mon profit est : $\frac{\Pi^m}{2}(1 + \delta + \delta^2 + \cdots) = \frac{\Pi^m}{2(1-\delta)}$
Si je trahis avec $p^m - \varepsilon$, mon profit sera : $\Pi^m + 0 \times (\delta + \delta^2 + \cdots) = \Pi^m$

On a équilibre de Nash si $\delta \geq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire si le futur compte, ce qui somme toute est assez logique puisque cet équilibre est fondé sur une menace future. Une telle stratégie n'aura pour ainsi dire aucune prise sur un *No Future*. Il faut noter qu'à l'équilibre, la menace n'est jamais mise à exécution. Inutile dans ces conditions de signer un contrat explicite et illicite.

4.5 Qualité et différenciation

4.5.1 Différenciation horizontale et verticale

Précédemment, les produits étaient homogènes. Les entreprises ont-elle intérêt à se différencier. Il y a deux types de différenciation :

- La différenciation est verticale lorsque tout le monde s'accorde pour dire que l'un des produits est meilleur que l'autre. On parle dans ce cas de différenciation par la qualité.
- La différenciation est dire horizontale lorsque certains préfèrent un produit et d'autres l'autre. On parlera alors plus volontiers de différenciation par la variété.

Un exemple très parlant est celui des gammes de produits. Entre le haut de gamme et le bas de gamme, la différenciation est verticale, mais au sein d'une même gamme, la différenciation est horizontale.

4.5.2 Un modèle de différenciation horizontale

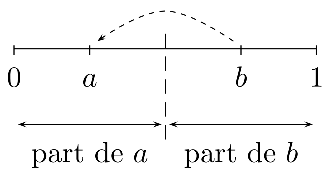
On considère une plage[10] au soleil.

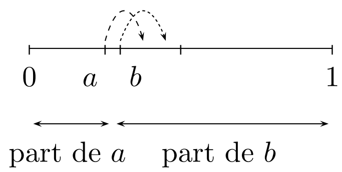
Cette plage est linéaire et représentée par le segment $[0, 1]$. Les estivants, dont l'emplacement est noté x, sont répartis uniformément sur cette plage. Ils sont prêts à payer cher pour avoir une glace. Deux marchands peuvent s'installer sur la plage. On se demande où ils vont s'installer et le prix qu'ils vont pratiquer. On peut faire une analogie avec les gammes : l'estivant en 0 va plutôt préférer les glaces du marchand du côté gauche et à l'opposé, l'estivant en 1 va préférer les glaces du marchand proche de 1, alors que les glaces ont sensiblement la même qualité.

[10] c'est une allégorie balnéaire.

Premier cas

Les prix des glaces sont réglementés. Il n'y a pas de liberté des prix. Le coût d'achat d'une glace à a pour l'estivant en x résultant d'une modélisation quadratique du coût de déplacement est : $p_a + (x-a)^2$. A l'équilibre de Nash, les deux marchands se mettent au milieu, *id est* en $\frac{1}{2}$, puisque si tel n'était pas le cas, chacun aurait intérêt à se mettre juste à droite du concurrent si celui-ci est dans la partie gauche ($\leq \frac{1}{2}$) et juste à gauche si celui-ci est dans la partie droite ($\geq \frac{1}{2}$). Nous avons représenté une convergence probable vers l'équilibre.





Deuxième cas

Le maire fixe les endroits d'implantation, de sorte à minimiser la somme des carrés des distances. Il impose alors aux marchands de se placer en $(\frac{1}{4}, \frac{3}{4})$. Nous n'en dirons pas davantage.

Troisième cas

Souplesse, flexibilité...Les marchands choisissent leur emplacement et les prix qu'ils pratiquent. Nous allons modéliser comme suit le problème :

- **Etape première** Les marchands choisissent leur emplacements (a, b). On suppose sans perte de généralité que $a < b$.
- **Etape deuxième** Ils fixent (p_a, p_b). On suppose nul le coût marginal de production de la glace.

Rem. : Les décisions de long terme sont d'abord prises. On considère ici que la décision d'implantation est plus irréversible dans l'intervalle de temps étudié que le simple changement de prix. Il faut être conscient qu'une interversion des étapes précédentes donnera lieu à des résultats bien différents, et peut-être aberrants car elle ne correspondrait pas à la « bonne » modélisation.

x[11] achète à a[12] si et seulement s'il est plus avantageux pour lui d'acheter à a qu'à b, c'est-à-dire :

$$p_a + (x-a)^2 \leq p_b + (x-b)^2$$

[11] Nous nous permettons une petite métonymie en désignant l'individu en x simplement par son emplacement.
[12] *idem, mutatis mutandis.*

ce qui équivaut à :

$$(b-a)(2x-(a+b)) \leq p_b - p_a$$

soit encore :

$$x \leq \frac{a+b}{2} + \frac{p_b - p_a}{2(b-a)} = \bar{x}$$

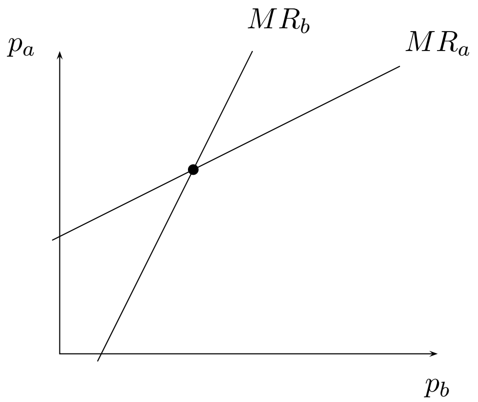
A l'évidence, si $p_a = p_b$, la limite se situe au milieu de $[a, b]$, ce qui nous avons implicitement déjà utilisé pour la réalisation de nos schémas du cas premier. La pratique de prix différents déplace simplement la limite du côté de celui qui affiche le prix le plus élevé (il a donc moins de clients). $(b-a)$ peut être perçu comme un indicateur de différenciation. Lorsque $(b-a)$ est petit, grande est la différenciation. Si b se rapproche de a, l'augmentation de la concurrence se manifeste par une influence des prix plus importante.

Calculons l'équilibre de Nash en aval. Le programme de maximisation de a s'écrit, en étape 2 :

$$\max_{p_a} p_a \bar{x} = p_a \left(\frac{a+b}{2} + \frac{p_b - p_a}{2(b-a)} \right)$$

Finalement, on obtient les fonctions de meilleure réponse suivantes :

$$\begin{cases} MR_a(p_b) \ : \ p_a = \frac{b^2 - a^2 + p_b}{2} \\ MR_b(p_a) \ : \ p_b = \frac{(1-a)^2 - (1-b)^2 + p_a}{2} \end{cases}$$



Cela donne :

$$\begin{cases} p_a^* = \frac{(b-a)(a+b+2)}{3} \\ p_b^* = \frac{(b-a)(4-a-b)}{3} \end{cases}$$

On voit ici que si $(b-a)$ est petit (terme de différenciation), les marges sont réduites. A la limite, $[b-a=0] \Rightarrow [p=0]$. Il y a aussi l'effet de centralité : les termes $\frac{a+b+2}{3}$ et $\frac{4-a-b}{3}$. Lorsque a et b sont proches de $\frac{1}{2}$, ces termes sont proches de un[13].

On a :

$$\Pi_a(a, b) = \frac{(b-a)(a+b+2)}{3} \left[\frac{a+b}{2} + \frac{p_b^* - p_a^*}{2(b-a)} \right]$$

ce qui donne :

$$\Pi_a = \frac{p_a^{*^2}}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(a+b+2)^2}{18}$$

Finalement, on obtient après calcul un équilibre en $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{5}{4}$.

[13]Tout ceci pour dire qu'« au milieu, c'est merveilleux ».

En fait on a le dilemme suivant : Si a et b sont proches, ils se mettent au milieu et ont un grand marché, mais ils se font concurrence. S'ils s'isolent, il y a moins de concurrence, mais leur marché est plus petit. Ici, l'effet d'isolation prévaut sur l'autre effet. On peut aussi faire des modèles plus sophistiqués avec une information imparfaite due à la distance. Ce sont des modèles de *search* : les clients vont visiter les marchands de glace et consulter les prix avant de se décider, mais comme leurs déplacements sont coûteux, ils vont parfois acheter chez le premier marchand visité, selon leurs coûts de déplacement et la probabilité de prix qu'ils affectent à l'autre marchand.

4.6 Entrée–sortie, Barrières stratégiques à l'entrée

Sous ce nom se cachent tous les comportements anti-concurrentiels. Ces modèles sont extrêmement populaires au sein des entreprises de consultants. Il y aura essentiellement deux étapes. La première étape sera structurelle et fixera les capacités de production. La seconde étape consistera en un ajustement stratégique des prix. Au lieu d'utiliser la capacité à des fins économiques, c'est-à-dire à la production, elle va être utilisée à des fins stratégiques, c'est-à-dire que le choix d'une grande capacité est une préparation latente à la guerre des prix. Ici, les variables économiques révèlent des vertus stratégiques.

4.6.1 Un modèle simple de sur-investissement stratégique

On suppose qu'il y a une firme en place et un entrant potentiel. Il y aura trois étapes :

- **Etape 1 :** La firme en place investit κ_1.
- **Etape 2 :** L'entrant potentiel investit κ_2.
- **Etape 3 :** $\Pi_1 = \kappa_1(1-\kappa_1-\kappa_2)$, $\Pi_2 = \kappa_2(1-\kappa_1-\kappa_2) - f$, où f est le coût d'entrée fixe, supposé nul pour le moment.

Nous allons une fois de plus raisonner par *backward induction.*

κ_1 est fixé. On a[14] :

$$MR_2(\kappa_1) = \arg\max_{\kappa_2}(\kappa_2(1-\kappa_1-\kappa_2))^+ = \frac{1-\kappa_1}{2}$$

Dès lors, le programme de maximisation de 1 va être :

$$\max_{\kappa_1} \kappa_1\left(1-\kappa_1-\frac{1-\kappa_1}{2}\right) = \max_{\kappa_1} \kappa_1\frac{1-\kappa_1}{2}$$

Ce qui va nous donner :

$$\kappa_1 = \frac{1}{2} \text{ et } \kappa_2 = \frac{1}{4}$$

On remarque que $\frac{1}{4}$ est bien la meilleure réponse de 2 à $\frac{1}{2}$, mais que $\frac{1}{2}$ n'est pas la meilleure réponse de 1 à $\frac{1}{4}$. En effet, si $\kappa_2 = \frac{1}{4}$, le programme de maximisation de 1 conduit à $\kappa_1 = \frac{3}{8}$ ($\Pi_1 = \kappa_1(1-\frac{1}{4}-\kappa_1)$). Il advient en fait que κ_1 étant irréversible, 2 n'a pas de souci à se faire.

On a $\frac{3}{8} < \frac{1}{2}$: 1 a investit stratégiquement. Si κ_1 était réversible, on aboutirait à l'équilibre de Nash $\kappa = \kappa_1 = \kappa_2 = \frac{1}{3}$, ce qui donnerait lieu à un profit $\Pi = \frac{1}{9}$. Ici, $\Pi_1 = \frac{1}{8} > \frac{1}{9}$. En cas de réversibilité, la stratégie de sur-investissement ne marche pas. L'irréversibilité est donc exploitée.

[14] on note : $x^+ = \max(x, 0)$

Donnons autre exemple de la vie de tous les jours où l'irréversibilité est exploitée à des fins stratégiques. On considère deux pays A et B séparés par une sorte de fleuve au milieu duquel émerge un petit îlot renfermant une richesse quelconque[15]. Cet îlot est relié à chaque pays par un pont. Il est connu que les armées n'aiment pas se battre mais aiment avant tout triompher. L'un des pays, par exemple A va se mettre stratégiquement dans une situation d'irréversibilité en procédant comme suit : Son armée va envahir l'îlot et détruire le pont derrière elle. De la sorte, elle va mettre l'autre pays devant le fait accompli : Si B décide maintenant d'aller sur l'îlot, il y aura nécessairement combat car A ne peut plus reculer, et B ne va donc pas s'y aventurer[16]. On peut y voir un certain machiavélisme[17].

On suppose maintenant que $f > 0$, c'est-à-dire qu'il existe des coûts fixes à l'entrée. On a :

$$\Pi_2(\kappa_1, MR_2(\kappa_1)) = \frac{1-\kappa_1}{2} \times \left(1 - \kappa_1 - \frac{1-\kappa_1}{2}\right) - f = \left(\frac{1-\kappa_1}{2}\right)^2 - f$$

On voit alors que :

$$\exists \tilde{\kappa_1} \text{ tel que} \begin{cases} \kappa_1 \geq \tilde{\kappa_1} \Rightarrow \kappa_2 = 0, \text{ et 2 n'entre pas} \\ \kappa_1 \leq \tilde{\kappa_1} \Rightarrow \kappa_2 = \frac{1-\kappa_1}{2} \end{cases}$$

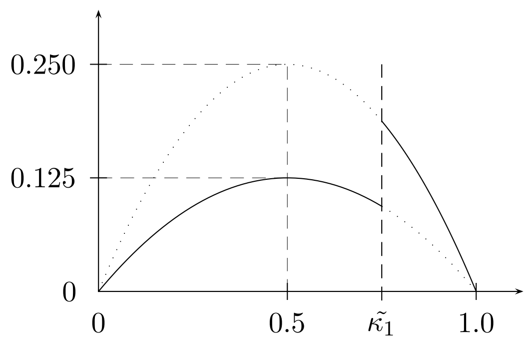
On a : $\tilde{\kappa_1} = 1 - 2\sqrt{f}$

Dès lors :

$$\Pi_1(\kappa_1) = \begin{cases} \kappa_1 \geq \tilde{\kappa_1} & \Pi_1 = \kappa_1(1-\kappa_1) \\ \kappa_1 \leq \tilde{\kappa_1} & \Pi_1 = \kappa_1\left(\frac{1-\kappa_1}{2}\right) \end{cases}$$

Il y a alors deux cas de figure selon la valeur de $\tilde{\kappa_1}$.

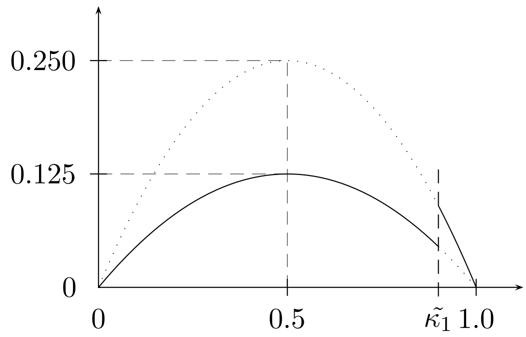
Barrière à l'entrée



1 n'investit pas $\frac{1}{2}$, l'investissement optimal lorsque 2 participe mais $\tilde{\kappa_1}$ et empêche 2 d'entrer. A l'aide d'une énorme capacité, 1 fait en quelque sorte baisser les prix jusqu'à ce que les coûts fixes d'entrée pour 2 soient suffisamment importants relativement aux profits projetés de sorte à le dissuader d'entrer.

[15] par exemple, un modeste poly de micro LaTeXiZé.
[16] En outre, le butin serait modeste.
[17] *Fac et excusa.*

Accommodation



Cette fois-ci, le maximum est en $\frac{1}{2}$, 1 va investir $\kappa_1 = \frac{1}{2}$ et permettre à 2 d'entrer car le sur-investissement nécessaire à dissuader 2 est trop important.

4.6.2 Taxonomie

On a une première firme qui à l'étape 1 fait un investissement κ_1. En deuxième étape, les firmes choisissent leur production (x_1, x_2), ce qui leur donne des profits $\Pi_1(\kappa_1, x_1, x_2)$ et $\Pi_2(\kappa_1, x_1, x_2)$.

Un équilibre de Nash en aval $(x_1^*(\kappa_1), x_2^*(\kappa_1))$ vérifie :

$$\begin{cases} x_1^*(\kappa_1) = \arg\max_{x_1} \Pi_1(\kappa_1, x_1, x_2^*(\kappa_1)) \\ x_2^*(\kappa_1) = \arg\max_{x_2} \Pi_2(\kappa_1, x_1^*(\kappa_1), x_2) \end{cases}$$

Les profits d'équilibre sont alors :

$$\begin{cases} \tilde{\Pi_1}(\kappa_1) \equiv \Pi_1(\kappa_1, x_1^*(\kappa_1), x_2^*(\kappa_1)) \\ \tilde{\Pi_2}(\kappa_1) \equiv \Pi_2(\kappa_1, x_1^*(\kappa_1), x_2^*(\kappa_1)) \end{cases}$$

Il y a deux optiques : se faire du bien en maximisant son profit, ou faire du mal en minimisant le profit de l'autre.

• **Dispenser le mal**[18]
On écrit :

$$\frac{d\tilde{\Pi_2}}{d\kappa_1} = \underbrace{\frac{\partial \Pi_2}{\partial \kappa_1}}_{\substack{\text{terme} \\ \text{direct}}} + \underbrace{\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_1} \times \frac{dx_1^*}{d\kappa_1}}_{\substack{\text{terme} \\ \text{stratégique} \\ S_2}} + \underbrace{\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_2}}_{\substack{0 \\ \text{th. enveloppe}}} \times \frac{dx_2^*}{d\kappa_1}$$

On met de côté le terme direct pour nos considérations ; on ne regarde donc que S_2. Si $S_2 \geq 0$, il faut investir un κ_1 faible : il faut voir petit pour être méchant. On dit que κ_1 est *soft*. Si au contraire $S_2 \leq 0$, il faut être gros pour être méchant. On aura alors un κ_1 *tough*.

• **Se faire du bien**
On écrit :

$$\frac{d\tilde{\Pi_1}}{d\kappa_1} = \underbrace{\frac{\partial \Pi_1}{\partial \kappa_1}}_{\substack{\text{terme} \\ \text{direct}}} + \underbrace{\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} \times \frac{dx_2^*}{d\kappa_1}}_{\substack{\text{terme} \\ \text{stratégique} \\ S_1}} + \underbrace{\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1}}_{\substack{0 \\ \text{th. enveloppe}}} \times \frac{dx_1^*}{d\kappa_1}$$

[18] c'est l'affaire des *evil doers*.

Peut-on concilier les deux effets ?
On note $\varepsilon(x)$ le signe de x. On a :

$$\varepsilon(S_1) = \varepsilon\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2} \times \frac{dx_2^*}{d\kappa_1}\right)$$

On suppose que le jeu en aval est symétrique, c'est-à-dire que : $\varepsilon\left(\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2}\right) = \varepsilon\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_1}\right)$. On a alors :

$$\varepsilon(S_1) = \varepsilon\left(\frac{\partial \Pi_2}{\partial x_1} \times \frac{dx_1^*}{d\kappa_1}\right) \cdot \varepsilon\left(\frac{dx_2^*}{dx_1^*}\right)$$

soit encore :

$$\varepsilon(S_1) = \varepsilon(S_2) \cdot \varepsilon\left(\frac{dx_2^*}{dx_1^*}\right)$$

Deux cas se présentent alors :

- 1^{er} cas : $\frac{dx_2^*}{dx_1^*} \geq 0$. Les deux fonctions de meilleure réponse sont croissantes. Dans ce cas, c'est horrible : on ne peut se faire du bien tout en faisant du mal à autrui.
- 2^{nd} cas : $\frac{dx_2^*}{dx_1^*} \leq 0$. Cela correspond à des fonctions de meilleure réponse décroissantes. Dans ce cas, on peut se faire du bien et dispenser le mal ce faisant, en toute impunité. Plusieurs cas de figure peuvent alors se présenter : soit il faut κ_1 grand pour se faire du bien et dispenser le mal, soit il faut κ_1 petit. Le premier cas correspond à une stratégie de *top dog*.

Quelques exemples :

- Limitation volontaire de capacité : Une chaîne hôtelière veut s'implanter sur la côte d'Azur. A-t-elle intérêt à entrer grosse ou petite ? En entrant petite, il va y avoir accommodation. L'entrée va être pacifique car les variations de prix associées vont être faibles.
- Prolifération stratégique : On considère un monopole sur le segment $[0, 1]$. Il est établi en 0. Un entrant potentiel lorgne l'emplacement 1. Aussi, avant que l'autre ne vienne, le monopole prend l'initiative de s'implanter en 1. Il peut cependant advenir que la stratégie soit néfaste au secteur 0, secteur historique car lorsque l'entrant va s'implanter en 1, la concurrence va faire baisser les prix en 1, ce qui va se répercuter en 0.

*

*   *