

Microéconomie Avancée
Sujet proposé par
Louis-André Gérard-Varet et Dominique Henriët
Janvier 2000

A. Problème : Risque moral en équipe

Deux individus $i=\{1,2\}$ travaillent en équipe. Le résultat z de leur travail dépend des efforts e_1 et e_2 , $e_i \in [0,1]$, des membres de l'équipe. Schématiquement leur travail peut déboucher sur deux résultats : le succès ($z=1$) qui se traduit par un gain total de 1 et l'échec ($z=0$) qui se traduit par un gain nul. La relation liant les efforts au résultat est donnée par la probabilité $g(z=1/ e_1, e_2)$ d'obtenir un succès sachant les niveaux d'effort. On suppose ici :

$$g(z=1/ e_1, e_2)=\text{Min}(1, e_1 + e_2)$$

Soit t_i la part du résultat qui revient à l'individu i . On a bien sûr $t_1+t_2=1$. Le surplus brut que retire l'individu i est donné par $W_i(t_i, z)=E(2t_i z)$, où E désigne l'espérance mathématique. Le coût individuel de l'effort (mesuré avec la même unité que le surplus brut) est donné par :

$$C_i(e_i)=q e_i^2, q>0.$$

On suppose d'abord que les individus se sont mis d'accord sur un partage égalitaire : $t_i=1/2$.

1. Donner l'expression du surplus net $U_i(e_1, e_2)$ espéré par chaque individu pour des niveaux d'effort donnés.

Un choix décentralisé (non coopératif) des efforts se traduit par un équilibre de Nash dans le jeu où les stratégies individuelles sont les efforts et les paiements les surplus net individuels espérés.

2. Le niveau d'effort e_2 étant fixé, calculer et représenter graphiquement la meilleure réponse $MR_1(e_2)$ du joueur 1.
3. Montrer que pour $q \geq 1$, il existe un unique équilibre de Nash (e_1^*, e_2^*) .
4. Commenter le cas $q < 1$.

Dans les mêmes conditions de partage, un choix centralisé (coopératif), s'il était possible, des efforts se traduirait par des niveaux d'effort maximisant le surplus collectif égal à la somme des surplus individuels : $U_1(e_1, e_2) + U_2(e_1, e_2)$.

5. Calculer les niveaux d'efforts (\hat{e}_1, \hat{e}_2) qui maximisent le surplus collectif. On sera amené à distinguer $q \leq 2$ et $q > 2$.
6. Dans le cas où $q > 2$, les niveaux d'efforts centralisés peuvent-ils être obtenus de manière décentralisée? La décentralisation entraîne-t-elle trop ou trop peu d'effort? Commenter.
7. En reprenant les questions précédentes, existe-t-il un partage du gain collectif qui ne soit pas égalitaire ($t_i \neq 1/2$) tel que la solution centralisée puisse être obtenue de manière décentralisée?

B. Exercice de Théorie des Jeux : Crédibilisation d'une menace

On considère le jeu "J" à deux joueurs (A et B) suivant :

- le jeu J se joue en deux coups. Au premier coup le joueur A choisit entre G et D. Au deuxième coup le joueur B observe le coup joué par A et choisit entre O et N.
- les paiements sont les suivants :
 - issue (GO) : (1,-1),
 - issue (GN) : (3,0),
 - issue (DO) : (2,1),
 - issue (DN) : (4,0).

1. Représenter l'arbre du jeu J.
2. Déterminer le(s) équilibre(s) parfaits de ce jeu.
3. Représenter le jeu précédent sous forme normale.
4. Déterminer le(s) équilibre(s) de Nash en stratégies pures. Montrer qu'un des équilibres repose sur une menace non crédible du joueur B.

On suppose maintenant que le joueur B a la possibilité, avant que le jeu J ne commence, de choisir entre deux attitudes :

- Attendre que A joue, (c'est à dire jouer le jeu J)
 - ou bien laisser dans une enveloppe des instructions précises sur ce qu'il compte faire quand son tour viendra dans J, et de partir "loin" de la table de jeu.
- Le joueur A a alors la possibilité
- Ou bien, d'ouvrir l'enveloppe immédiatement puis de jouer (action U)
 - Ou bien de jouer d'abord (G ou D) puis d'ouvrir l'enveloppe.

5. Représenter sous forme normale le jeu commençant au point où B a décidé de laisser des instructions dans une enveloppe (on notera que dans ce jeu, A a trois stratégies).
6. Quels sont les équilibres de Nash en stratégies pures de ce jeu.
7. Montrer que la stratégie U est faiblement dominante.
8. Si B anticipe que A ouvrira l'enveloppe avant de jouer (stratégie U), quelle est sa meilleure stratégie entre attendre que A joue ou laisser des instructions.
9. Quel sera alors son paiement
10. Commenter