

I. Problème : Concurrence en tarifs non linéaires

Ce problème étudie la concurrence en tarifs non linéaires entre deux entreprises, fournissant des biens imparfaitement substituables. Chacune des deux entreprises fabrique son produit à coût marginal constant $c_i < 3$.

La demande est composée d'un continuum de consommateurs. Chaque consommateur est caractérisé par un paramètre de goût $\theta \in [0,1]$ distribué uniformément sur $[0,1]$. Le nombre total d'acheteurs potentiels est normalisé à 1.

Acheter une quantité q au prix total t auprès de l'entreprise 1 procure au consommateur de type θ un surplus :

$$u_1(\theta, q, t) = (2 + \theta)q - \frac{1}{2}q^2 - t$$

de même, acheter auprès de l'entreprise 2 lui procure un surplus égal à :

$$u_2(\theta, q, t) = (3 - \theta)q - \frac{1}{2}q^2 - t$$

(On remarquera que $u_2(\theta, q, t) = u_1(1 - \theta, q, t)$.)

En fonction des tarifs proposés, chaque consommateur choisit un fournisseur, $i=1$ ou 2 , et décide combien acheter. Il peut bien sûr décider de ne rien acheter du tout.

A. Tarification au coût marginal

Supposons que chaque entreprise tarife au coût marginal, c'est à dire propose une offre commerciale telle que $t \equiv c_i q$.

1. Déterminer la quantité $q_i^*(\theta)$ achetée par le consommateur θ si celui-ci s'adresse à l'entreprise i .
2. Calculer le niveau de surplus $V_i^*(\theta) \equiv u_i(\theta, q_i^*(\theta), c_i q_i^*(\theta))$ atteint par le consommateur θ , si celui-ci s'adresse au fournisseur i .
3. Chaque consommateur choisit le fournisseur qui lui procure le surplus le plus élevé. En déduire les parts de marché de chacune des deux entreprises.

B. Tarification non linéaire

On prendra dans toute la suite $c_1 = c_2 = c$.

On suppose maintenant que l'offre commerciale de chaque entreprise est un tarif, a priori non linéaire : $t = \tau_i(q)$, τ_i étant une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$.

On note $q_i(\theta, \tau_i)$,

$$q_i(\theta, \tau_i) \equiv \arg \max_{q \geq 0} u_i(\theta, q, \tau_i(q))$$

la quantité achetée par le consommateur θ , s'il choisit le fournisseur i (en cas d'indifférence entre plans de consommation -non unicité de la solution du programme de maximisation-, on prendra l'une quelconque des solutions) et :

$$V_i(\theta, \tau_i) \equiv \max_{q \geq 0} u_i(\theta, q, \tau_i(q))$$

le surplus ainsi atteint par le consommateur θ .

B1. Comportement des consommateurs.

Dans cette partie on suppose fixés les tarifs (τ_1, τ_2) proposés par les entreprises et l'on s'intéresse au comportement des consommateurs. Face à l'offre (τ_1, τ_2) , chaque consommateur choisit soit de ne pas consommer (ce qui lui procure un surplus nul) soit de s'adresser à l'entreprise 1 (ce qui lui procure un surplus égal à $V_1(\theta, \tau_1)$), soit de s'adresser à l'entreprise 2 (ce qui lui procure un surplus égal à $V_2(\theta, \tau_2)$).

1. Montrer que $q_1(\theta, \tau_1)$ est une fonction croissante de θ , et que $q_2(\theta, \tau_2)$ est une fonction décroissante de θ . Pour cela on écrira que le consommateur θ (resp θ') préfère, au tarif $\tau_i(\cdot)$, acheter $q_i(\theta, \tau_i)$ (resp $q_i(\theta', \tau_i)$) plutôt que $q_i(\theta', \tau_i)$ (resp $q_i(\theta, \tau_i)$).

2. Montrer de manière analogue que $V_1(\theta, \tau_1)$ est une fonction croissante de θ , et que $V_2(\theta, \tau_2)$ est une fonction décroissante de θ .

3. En déduire que les parts de marché de chacune des entreprises sont de la forme: pour 1: $E_1 = [\hat{\theta}_1, 1]$, pour 2: $E_2 = [0, \hat{\theta}_2]$ avec $0 \leq \hat{\theta}_2 \leq \hat{\theta}_1 \leq 1$.

4. Montrer que, presque partout, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial V_1}{\partial \theta}(\theta, \tau_1) &= q_1(\theta, \tau_1) \\ \frac{\partial V_2}{\partial \theta}(\theta, \tau_2) &= -q_2(\theta, \tau_2)\end{aligned}$$

(On pourra supposer pour le démontrer que toutes les fonctions sont suffisamment différentiables ou utiliser le théorème de l'enveloppe).

5. En déduire que le profit réalisé par l'entreprise 1 sur le consommateur de type $\theta \in E_1$ s'écrit :

$$(2 + \theta - c)q_1(\theta, \tau_1) - \frac{1}{2}(q_1(\theta, \tau_1))^2 - \int_{\hat{\theta}_1}^{\theta} q_1(s, \tau_1)ds - V_1(\hat{\theta}_1, \tau_1)$$

6. Ecrire de la même façon le profit réalisé par l'entreprise 2 sur le consommateur de type $\theta \in E_2$.

7. En utilisant l'hypothèse de distribution uniforme de θ , démontrer (à l'aide d'une intégration par parties) que le profit de l'entreprise 1 s'écrit :

$$\Pi_1(\tau_1, \tau_2) = \int_{\hat{\theta}_1}^1 \left\{ (2\theta + 1 - c)q_1(\theta, \tau_1) - \frac{1}{2}(q_1(\theta, \tau_1))^2 \right\} d\theta - (1 - \hat{\theta}_1)V_1(\hat{\theta}_1, \tau_1)$$

Où $\hat{\theta}_1$ est défini par $V_1(\hat{\theta}_1, \tau_1) = \sup(0; V_2(\hat{\theta}_1, \tau_2))$

8. Ecrire de la même façon le profit réalisé par l'entreprise 2