

**Problème (12 points)**

On considère le problème du financement par l'Etat d'un service public confié à un producteur autonome. Ce service est délivré gratuitement à la population. On pourra par exemple penser au financement d'un hôpital. Le service procure à la population un surplus total brut noté  $S$ . Le coût de production du service est noté  $C = \beta - e$ , où  $\beta$  est un paramètre de coût exogène pouvant prendre, tout au long du problème, deux valeurs possibles  $\beta_1 < \beta_2$ , et  $e$  un paramètre d'effort positif sous contrôle de l'établissement. L'effort engendre une désutilité pour le producteur notée  $\Psi(e)$ . Dans le problème on prendra  $\Psi(e) = \frac{1}{2}e^2$ . Pour financer le service l'Etat verse un transfert  $p$  à l'entreprise. Ce transfert est financé sur ressources publiques et engendre donc un coût d'opportunité: 1F de ressources coûte au consommateur  $(1+\lambda)F$ , avec  $\lambda > 0$ . Les surplus nets sont alors :

$$U(p) \text{ surplus du consommateur / contribuable : } U(p) \equiv S - (1+\lambda)p$$

$$\Pi(p, e, \beta) \text{ surplus du producteur : } \Pi(p, e, \beta) \equiv p - (\beta - e + \Psi(e)),$$

**A. Information Complète**

*On suppose pour commencer que l'Etat observe  $C$  et  $\beta$  (et donc observe  $e \equiv \beta - C$ ).*

1. Calculer la tarification optimale  $p^*(\beta)$  et l'effort  $e^*(\beta)$  qui maximisent en  $p$  et  $e$  le surplus total  $W = U + \Pi$  sous la contrainte  $\Pi \geq 0$ . On notera  $W^*(\beta)$  le surplus obtenu à l'optimum.

**B. Information incomplète,**

*On suppose maintenant que l'Etat n'observe que le coût  $C$ ; il ne sait pas distinguer entre la composante exogène et la composante d'effort du coût. Un système de tarification est alors une "formule" définissant  $p$  en fonction des variables observables. Face à ce système le producteur réagit de manière optimale en réalisant l'effort qui maximise son surplus. On note  $\mu_i$  la probabilité que l'entreprise soit de type  $i$  (c'est à dire ayant un paramètre de coût  $\beta = \beta_i$ ). On a bien sûr  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ .*

**B.1 Cost-plus et Price cap.**

*On examine d'abord deux mécanismes possibles de tarification : le système price cap est un prix  $p$  indépendant du coût observé ( $p = p_0$ ); le système cost plus est un prix  $p$  égal au coût observé augmenté éventuellement d'une prime  $s_0$  constante ( $p = C + s_0$ )*

2. Quel est l'effort réalisé par l'entreprise de type  $i$  dans le cas d'un système price cap. Comparer à l'effort obtenu en 1.

3. Déterminer la tarification de type price-cap optimale  $p_0^*$  (qui maximise l'espérance de  $W$  sous contrainte que  $\Pi_1 \geq 0$  et  $\Pi_2 \geq 0$ )?

4. Comparer le surplus  $W_0$  obtenu avec l'espérance du surplus d'information complète.
5. Quel est l'effort réalisé lorsque la tarification est de type cost-plus. Comparer avec les questions 1 et 2.
6. Déterminer la tarification cost-plus optimale et calculer le surplus obtenu. Comparer avec les questions précédentes.

### **B.2 Tarification générale optimale**

*On cherche dans cette partie à déterminer le mode de tarification général optimal. On opérera un changement de variable en exprimant toutes les grandeurs en fonction de  $\beta$ ,  $p$  et  $C$  en particulier :  $\Pi(p, C, \beta) = p - C - \Psi(\beta - C)$ .*

*On suppose que l'Etat propose deux contrats  $(p_1, C_1)$  et  $(p_2, C_2)$ .*

7. Ecrire les contraintes d'incitation  $IC(ij)$  qui traduisent que l'entreprise de type  $i$  préfère le contrat  $i$  au contrat  $j$ .
8. Ecrire les contraintes de rationalité individuelle  $IR(i)$ .
9. Montrer que si les contrats vérifient les deux contraintes d'incitation alors  $C_1 \leq C_2$ .
10. Montrer que si les contrats vérifient  $IC(12)$  et  $IR(2)$  alors  $IR(1)$  est vérifiée.

*L'Etat cherche à maximiser l'espérance de  $W$  sous les contraintes d'incitation et de rationalité individuelle.*

11. Montrer (sans calcul) qu'à l'optimum la contrainte  $IC(12)$  est saturée (égalité). Pour cela on montrera que si tel n'était pas le cas on pourrait diminuer la rémunération de l'entreprise de type 1.
12. Montrer (sans calcul) que la contrainte  $IR(2)$  est saturée

*Pour résoudre le programme d'optimisation on suppose que la contrainte  $IC(21)$  est inactive à l'optimum.*

13. Ecrire les conditions du premier ordre associé au programme de maximisation de l'espérance de  $W$  sous les contraintes saturées  $IC(12)$  et  $IR(2)$ . (On exprimera  $W$  en fonction de  $C_1$  et  $C_2$ ).
14. Calculer  $p_1$  et  $p_2$ .
15. Quel est l'effort réalisé par l'entreprise de type  $i$  à l'optimum?
16. Commenter