Finance
Exercices

Evaluation par arbitrage, incertitude

Compléter un marché par une option

On considère un marché constitué par un actif *dont* les revenus demain sont notés a et trois états de la nature $E = \{e_1, e_2, e_3\}$. La matrice A des paiements est :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

1. Le marché est-il complet?

évidemment non!

2. Définir ce qu'est une option d'achat sur l'actif

Une option d'achat sur l'actif est un "papier" qui donne le droit d'acheter cet actif (demain) à un prix fixé aujourd'hui.

3 Définir les paiements associés à une option d'achat de prix d'exercice K.

le vecteur des paiements est :

$$v(K) = \begin{bmatrix} (4-K)^+ & (3-K)^+ & (1-K)^+ \end{bmatrix}$$

4. Montrer que l'on peut compléter le marché en introduisant deux options d'achats

laissé au lecteur!(on montrera qu'un choix judicieux des prix d'exercice permet d'obtenir le résultat...

Valorisation d'une option par arbitrage

On considère le modèle du cours dans lequel une action de cours S aujourd'hui est susceptible de monter (état up cours $= uS$) ou descendre (état down cours $= dS$).

Il existe par ailleurs un actif sans risque dont le taux d'intérêt est nul pour simplifier.

1. Ecrire la matrice A, le vecteur p

$$A = \begin{bmatrix} uS & dS \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$p = \begin{bmatrix} S \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. A quelle condition le marché est complet? Aquelle condition il est exempt d'opportunité d'arbitrage?

A régulière : $u \neq d$

$A^{-1}p$ positif $\Longleftrightarrow u > 1 > d$ mais il faut expliquer pourquoi!

Dans les applications numériques on prendra par exemple $u = 3/2$ et $d = 1/u$, $S = 1$

3 Calculer les $q(e)$

4 Définir ce que l'on appelle option de vente, ainsi que le flux financier associé

Une option de vente est le droit de vendre l'actif à un prix fixé à l'avance H

$$v = \left[(H - uS)^{+} \quad (H - dS)^{+}\right]$$

5. On considère un investisseur qui achète deux options : une option d'achat de prix d'exercice K **et une option de vente de prix d'exercice** H. **Ecrire son revenu**

$$v = \left[(H - uS)^{+} + (uS - K)^{+} \quad (H - dS)^{+} + (dS - K)^{+}\right]$$

6 Calculer le prix de ce portefeuille pour $H = K = S$

Modèle à deux périodes

On considère les données de l'exercice précédent sur deux périodes ($ud = 1$, $u = 3/2$).

1. Représenter l'arbre des cours

On considère une option d'achat négociée à la date 0 de prix d'exercice $K = \alpha S$ (avec $\alpha < 1$). A la différence d'une option européenne cette option peut être exercée soit à la date 1 soit à la date 2.

Plaçons nous à la date 1 dans l'état où l'action vaut uS. *Soit* le détenteur de l'option la garde ou la vend, soit il l'exerce.

2 Calculer la valeur de l'option (non exercée) à la date 1 dans l'état uS

$$q_u(u^2 - \alpha) + q_d(ud - \alpha) = u - \alpha$$

3 Calculer le revenu obtenu à la date 1 si (au contraire) le détenteur exerce l'option à la date 1

$$u - \alpha$$

5. Calculer le prix de l'option à la date 0

6. Que se passe-t-il si $\alpha > 1$?

Comportement en incertitude

Action et prise de risque

Le détenteur du capital d'une entreprise a un revenu égal à $\widetilde{x} = \max(0, \widetilde{R} - D) = (\widetilde{R} - D)^{+}$

où $D \geq A$ est la dette. Les variables aléatoires considérées ici (les bénéfices de l'entreprise) sont continues et varient entre A et B. L'actionnaire évalue ce revenu aléatoire grace à une fonction u sous l'hypothèse de von Neumann.

1. rappeler l'hypothèse de v N

l'investisseur calcule

$$(1) \quad Eu(\widetilde{x}) = \int_A^B u((r - D)^{+}) f(r) dr$$

Le CA a le choix entre deux stratégies. L'une donne un revenu aléatoire $\widetilde{R}$ (fonction de répartition F) l'autre donne un revenu $\widetilde{S}$ (fonction de répartition G) de même espérance mais plus risqué.

1. rappeler la définition de "plus risqué que" ainsi que sa caractérisation

$\int\limits_A^t G(s)ds \geq \int\limits_A^t F(r)dr$, et $E(\widetilde{S}) = E(\widetilde{R})$

2. Montrer que $E(\widetilde{R}) = B - \int_A^B F(r)dr$

(On intègre par parties)

2. Montrer qu'un actionnaire neutre au risque (u **est l'identité) préfère adopter** $\widetilde{S}$ **(prendre des risques) dès lors que** $D > A$.

on calcule (1) pour les deux variables aléatoires:

$$\begin{aligned}
Eu(\widetilde{x}) &= \int\limits_D^B (r-D)f(r)dr \\
&= \int\limits_D^B rf(r)dr - D(1-F(D)) \\
&= [rF(r)]_D^B - \int\limits_D^B F(r)dr - D(1-F(D)) \\
&= B - D - \int\limits_D^B F(r)dr \\
&= B - D - \int\limits_A^B F(r)dr + \int\limits_A^D F(r)dr
\end{aligned}$$

Le problème de gestion de stock d'un commerçant

Un commerçant (de denrées périssables) achète en gros au prix unitaire c. Il renvend au prix p. La demande est aléatoire (indépendante de p) égale à $\widetilde{x}$ (v.a. positive inférieure à B de fonction de répartition F). Il doit déterminer son approvisionnement z, sachant que tout surplus invendu est perdu.

On suppose d'abord qu'il est neutre au risque.

1. Calculer l'espérance de son profit s'il décide d'acheter z.

$$\int_0^B p\min(x,z)f(x)dx - cz$$

2 Calculer sa stratégie de commande optimale

$$\int_0^z pxf(x)dx + \int_z^B pzf(x)dx - cz$$

et on dérive par rapport à z.

3. Que se passe-t-il si le risque augmente (la demande passe de $\widetilde{x}$ **à** $\widetilde{y}$**, avec** $\widetilde{y}$ **plus risquée que** $\widetilde{x}$**)**