Arbitrage dynamique, valorisation d'une option, formule de Black et Scholes

Modèle binomial à une période

Le modèle que nous allons présenter est une application importante du chapitre précédent. On considère le cas où il existe deux actifs financiers, deux dates (0 et 1) et deux "états de la nature". Le premier actif est un actif sans risque entre 0 et 1. Il rapporte 1 euro dans chacun des deux états de la nature. Son prix bien sûr à la date 0 est, par définition du taux d'intérêt, égal à $\frac{1}{1+r}$. En payant $\frac{1}{1+r}$ aujourd'hui on est sûr d'avoir 1 demain. Le deuxième actif est une action. Elle vaut S aujourd'hui (son prix sur le marché). Demain elle peut prendre deux valeurs possibles : elle peut monter et valoir uS ou baisser et valoir dS. Bien sûr on suppose que $u \geq d$.

On résume la situation par la matrice suivante :

prix\état	*Up*	*Down*
$\frac{1}{1+r}$	1	1
S	uS	dS

Un portefeuille composé d'une "quantité" de z_1 actifs sans risque et de z_2 actions, rapporte à la date 1 :

Up	*Down*
$z_1 + z_2uS$	$z_1 + z_2uS$

pour un coût de $\frac{z_1}{1+r} + z_2S$

Si on note A la matrice :

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ uS & dS \end{bmatrix}$$

$$p = \begin{bmatrix} S \\ \frac{1}{1+r} \end{bmatrix}$$

Le revenu v et le coût c de ce portefeuille z s'écrivent :

$$\begin{aligned} v(z) &= {}^tzD = \begin{bmatrix} z_1 + z_2uS & z_1 + z_2dS \end{bmatrix} \\ c(z) &= {}^tzp \end{aligned}$$

Dès lors qu'il y a deux états de la nature et deux actifs, on peut obtenir n'importe quel "profil" de revenu

si la marice A est inversible. C'est à dire dès lors que le système de deux équations à deux inconnues a une solution (unique) pour tout $v = \begin{bmatrix} v_u & v_d \end{bmatrix}$:

$$\begin{bmatrix} z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ uS & dS \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_u & v_d \end{bmatrix}$$

C'est à dire lorsque $u > d$!

Dans ce cas le portefeuille qui donne le profil v s'écrit simplement :

$${}^tz = vD^{-1}$$

Son coût est :

$$c(v) = vD^{-1}p$$

A quelle condition y-a-t-il alors absence d'opportunité d'arbitrage? Regardons les coûts de chacun des portefeuille qui donnent les deux profils élémentaires suivants :

$$w_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$w_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On a évidemment :

$$D^{-1}p = \begin{bmatrix} \frac{1}{1+r}\frac{1+r-d}{u-d} \\ \frac{1}{1+r}\frac{u-(1+r)}{u-d} \end{bmatrix} = q$$

Cela signifie qu'en payant aujourd'hui $q_u = \frac{1}{1+r}\frac{1+r-d}{u-d}$, on obtient 1 euro demain uniquement dans le cas où l'action a monté (état up). L'absence d'opportunité d'arbitrage impose que q_u et q_d soient strictement positifs. Sinon il serait possible d'obtenir 1 euro à la date 1 sans débourser un centime à la date 0 (où même en encaissant à la date 0!!).

Il y a absence d'opportunité d'arbitrage si et seulement si on a :

$$d < 1 + r < u$$

Dans ces conditions on peut valoriser n'importe quel actif financier.

Proposition 23 *Le prix d'un actif qui donne le profil* $\begin{bmatrix} v_u & v_d \end{bmatrix}$ *est égal à :*

$$vD^{-1}p = q_u v_u + q_d v_d = \frac{1}{1+r}\left(\frac{1+r-d}{u-d}v_u + \frac{u-(1+r)}{u-d}v_d\right)$$

Bien sûr, on a en particulier :

$p = Dq$ c'est-à-dire :$\begin{cases} q_u + q_d = \frac{1}{1+r} \\ q_u uS + q_d dS = S \end{cases}$

Rappelons alors qu'une option d'achat est le droit d'acheter à la date 1 l'action au prix K. Si l'action vaut moins cher, on n'exerce pas l'option (cela n'a pas d'intérêt!). Si au contraire l'action vaut plus sur le marché on peut faire un bénéfice immédiat. Le profil de revenu est donc (on note $\max(x, 0) = x^+$):

$$\begin{bmatrix} (uS - K)^+ & (dS - K)^+ \end{bmatrix}$$

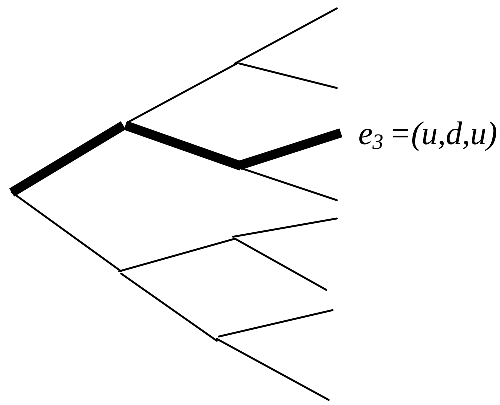
Le prix de cette option est donc :

$$q_u(uS - K)^+ + q_d(dS - K)^+$$

Modèle à temps discret, n périodes

Le modèle précédent peut être généralisé à plusieurs périodes. l'idée est la suivante : à chaque période le titre peut "monter" (cours multiplié par u) ou baisser (cours multiplié par d). Le titre sans risque, a un rendement par période constant égal à $1 + r$. On peut aisément représenter l'évolution des cours par un arbre. Pour un modèle à n périodes ($n + 1$ dates) il y a entre la première date 0 et la dernière date, n, 2^n histoires d'évolution possibles $(u, d, ...d, u, ...)$ qui débouchent sur $(n + 1)$ niveaux de cours possibles. Par exemple si le cours a monté k fois (c'est donc qu'il a déscendu $n - k$ fois, son cours vaudra $u^k d^{n-k} S$, et il y a C_n^k histoires possibles pour un tel cours

A chaque date t entre 0 et $n - 1$, on peut associer l'état de la nature correspondant à l'histoire de l'évolution des cours jusqu'à cette date. On note e_t un tel état de la nature. Dans cet état l'action vaut cote $S(e_t)$. Chaque état e_t a deux états de la nature "successeurs" à la date $t + 1$, l'un dans lequel l'histoire se poursuit par une montée $S(e_{t+1}) = uS(e_t)$, l'autre par une descente $S(e_{t+1}) = dS(e_t)$. Chaque état e_t, a ainsi un prédecesseur unique et deux successeurs. On note $e_{t+1} > e_t$ le fait que l'état e_t est l'unique prédecesseur de e_{t+1}.



Etat de la nature $e_3 = (u, d, u)$, son prédécesseur unique est $e_2 = (u, d)$

A la date t dans un état e_t , en considérant une stratégie d'investissement sur une seule période, tout se passe comme dans le modèle à 2 dates. Il en résulte, que l'absence d'opportunité d'arbitrage "intantané" impose qu'il existe q_u et q_d tels que :

$$\begin{aligned} q_u uS(e_t) + q_d dS(e_t) &= S(e_t) \\ q_u + q_d &= \frac{1}{1+r} \end{aligned}$$

C'est à dire comme tout à l'heure :

$$\begin{aligned} q_u &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\right) \\ q_d &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{u-(1+r)}{u-d}\right) \end{aligned}$$

On interprète ces deux valeurs comme les prix, à la date t des actifs élémentaires qui donnent 1 dans l'état de la nature correspondant à la date $t + 1$:

	Up	Down
q_u	1	0
q_d	0	1

Ainsi q_u est le prix qu'il faut payer à la date t pour obtenir le profil suivant à $t + 1$: 1 euro si l'action a monté entre t et $t + 1$, 0 sinon.

Notation 24 *Plus généralement on peut noter $q(e_{t+1}/e_t)$ le prix dans l'état e_t d'un euro disponible dans l'état e_{t+1}. Ce prix vaut ici soit q_u soit q_d selon que l'état e_{t+1}comporte une hausse ou une baisse en $t + 1$.*

Une fois cette remarque faite, il est extrêmement facile de déduire le prix à la date 0 d'un actif qui donne 1 euro dans un état e_p donné à la date p. Considérons en effet, à la date $p - 1$, l'état prédecesseur de e_p, .noté e_{p-1}.Pour avoir un euro à e_p il faut avoir $q(e_p/e_{p-1})$ euro à la date $p - 1$ dans l'état e_{p-1}, avec : $q(e_p/e_{p-1}) = q_u$ si le titre monte entre e_{p-1} et e_p, avec : $= q_d$ si le titre descend entre e_{p-1} et e_p, De proche en proche, en remontant le temps, pour avoir un euro dans l'état e_p il faut avoir à la date 0 : en déduit le prix à la date 0 :

$$\begin{aligned} q(e_p) &= q(e_p/e_{p-1})...q(e_{k+1}/e_k)...q(e_2/e_1)q(e_1/e_0) \\ \text{où } e_p &> e_{p-1}...e_{k+1} > e_k...e_2 > e_1 \\ &\quad \text{est l'unique chemin de } e_p \text{ à } 0 \end{aligned}$$

Ce résultat très simple va nous permettre de calculer le prix de n'importe quel actif financier variable aléatoire définie sur l'ensemble des états e_t.

Considérons par exemple un actif financier qui donne $a(e_t)$ à la date t si l'état e_t se réalise. On peut alors calculer très facilement le prix à la date 0 de cet actif.

Proposition 25 *Soit l'actif v dont le revenu est $v(e_t)$ à la date t. Son prix à la date 0 est donné par*

$$c(v) = \sum_{t=1}^{n} \sum_{e_t} q(e_t)v(e_t)$$

Considérons par exemple l'actif financier dérivé (imaginaire) suivant : son revenu est nul sauf à la date n où il donne 1 euro si le cours de l'action a monté exactement p fois (et donc baissé $n-p$ fois). Pour calculer le prix de cet actif il faut identifier les états e_t dans lesquels $a(e_t)$=1. Il s'agit des états e_n, tels qu'il y a eu p montées et $(n-p)$ baisses. Pour chacun de ces états $q(e_n) = q(e_n/e_{n-1})...q(e_{k+1}/e_k)...q(e_2/e_1)q(e_1/e_0) = q_u^p q_b^{n-p}$ qui est indépendant de l'ordre dans lequel les baisses et les hausses ont eu lieu. Il y a $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ tels états de la nature. On en déduit le prix de cet actif $C_n^p q_u^p q_b^{n-p}$.

Vérifions que le prix de l'actif sans risque qui donne 1 à la date n quoiqu'il arrive est bien égal à $\frac{1}{(1+r)^n}$. En effet d'après dce qui précède, ce prix est égal à $\sum_{p=0}^{n} C_n^p q_u^p q_b^{n-p} = (q_u + q_b)^n = \frac{1}{(1+r)^n}$

Vérifions que le prix de l'action est bien égal à S : Ce prix vaut $\sum_{e_n} q(e_n)S(e_n) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p q_u^p q_b^{n-p}(u^p d^{n-p})S = (q_u u + q_d d)^n S = S$

Notation 26 *On définit $\pi = (1+r)q_u$, et donc $1-\pi = (1+r)q_b$ (que l'on appelle "probabilités corrigées du risque").*

De la même manière : $\pi(e_t) = (1+r)^t q(e_t)$. On voit que par construction, $\sum_{e_t} \pi(e_t) = 1$.

$$c(v) = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{(1+r)^t} \sum_{e_t} \pi(e_t)v(e_t)$$

La valeur de l'actif est égale à la valeur actualisée de l'espérance de ses revenus calculée avec la distributionde probabilité π.

Prix d'une option en temps discret

Une option (d'achat) sur l'action S, (un "Call") négociée à la date 0, est le droit d'acheter cette action à la date n à un prix égal à K (prix d'exercice) fixé à lavance à la date 0.

On voit immédiatement que le revenu de cette option à la date n est exactement égal à (on note $\max(0,x) = x^+$.):

$$v(e_n) = (S(e_n) - K)^+$$

La valeur de cette option est donc égale à :

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{e_t} \pi(e_n)(S(e_n) - K)^+ \\ C &= \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{k/u^k d^{n-k} S \geq K} C_n^k \pi^k (1-\pi)^{n-k} (u^k d^{n-k} S - K) \end{aligned}$$

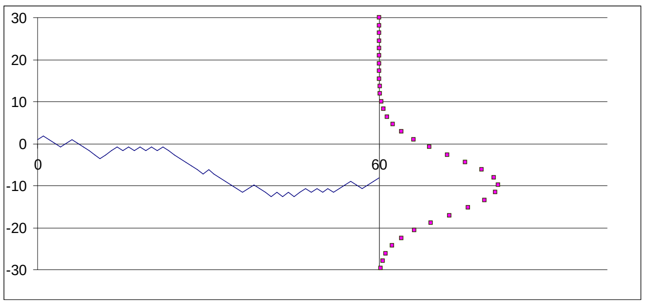
Extension au temps continu.

Marche aléatoire

Une marche aléatoire est un processus assez intuitif. Une variable X évolue au cours du temps (que nous supposons discret pour le moment) de la manière suivante :

Definition 27 *$\forall t = 0, 1, ..n$ $X(0) = X_0$, $X(t+1) = X(t) + \epsilon_{t+1}$ où ϵ_{t+1} est le résultat d'un tirage aléatoire : avec probabilité p, $\epsilon_{t+1} = s$, avec probabilité $(1-p)$ $\epsilon_{t+1} = -s$. Ainsi, à chaque instant, on tire au sort la variation de X entre t et $t+1$ selon une loi ici binomiale.*

Au cours du temps on voit assez intuitivement que X se déplace à chaque période, en moyenne, de $m = ps - (1-p)s = (p - 1/2)2s$.. Mais évidemment, plus le temps s'écoule plus X a des chances de s'éloigner de cette valeur. On peut imaginer un ivrogne sur une route qui à chaque instant fait un pas vers l'avant ou vers l'arrière. Même si l'on suppose qu'il tire son déplacement à pile ou face ($p = 1/2$), au bout d'un certain temps il sera assez loin de sa position de départ! A chaque instant, en moyenne son déplacement est nul, mais petit à petit il s'éloigne de sa position initiale. Le graphique suivant montre l'évolution d'une telle marche aléatoire ainsi que la distribution de probabilité des positions au temps terminal.



Marche aléatoire

Il existe un résultat fondamental de la statistique qui permet d'approcher la distribution de probabilité des positions terminales.

Proposition 28 *Si les ϵ sont tirées indépendamment, alors :*

$$\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + ...\epsilon_n - nm}{\sqrt{np(1-p)}2s} = \frac{X(1) - X_0 - nm}{\sqrt{np(1-p)}2s}$$

suit quand n tend vers l'infini une loi gaussienne $N(0,1)$, dite centrée réduite. (de densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$)

Marche aléatoire en temps continu

Comment généraliser le résultat précédent en temps continu? Fixons l'intervalle de temps à $[0,\ t]$. Et subdivisons cet intervalle en n périodes de durée $h = t/n$. Une marche aléatoire telle que définie plus haut s'écrit :

$X((k+1)h) = X(kh) + \epsilon_{k+1}$.

Ecrivons la variance de $X(t)$. Elle est égale à la somme des variances des variations intermédiaires (parce que les variations intermédiaires sont indépendantes entre elles):

$$var(X(t)) = n\mathrm{var}(\epsilon)$$

Si $\mathrm{var}(\epsilon)$ est indépendant de n alors on voit que multiplier les instants intermédiaires conduirait à une variance infinie. Pour que la variance reste finie, quand n tend vers l'infini,, il faut dont ajuster les variations instantanées de telle sorte que $n\mathrm{var}(\epsilon)$ tende vers une limite finie. Prenons $s = \sigma\sqrt{t/n}$, la variance de ϵ est alors égale à $\frac{4p(1-p)\sigma^2 t}{n}$.

Calculons alors l'espérance de $X(t)$:

$$E(X(t)) = X_0 + nE(\epsilon) = X_0 + \sqrt{n}(p - 1/2)2\sigma\sqrt{t}$$

De la même manière, éviter que le processus n'explose implique que $\sqrt{n}(p - 1/2)$ reste fini. On prend alors $p = 1/2 + \frac{\mu\sqrt{t}}{2\sigma\sqrt{n}}$. Avec ces deux hypothèses on a alors :

$$\begin{array}{rcl} var(X(t) & \to & \sigma^2 t \\ E(X(t)) & \to & X_0 \ + \mu t \end{array}$$

On peut alors appliquer une version un peu plus complexe du théorème précédent et affirmer :

Proposition 29 *Si l'on définit une marche aléatoire X entre 0 et t par $X(0) = X_0, X\left((k+1)\frac{t}{n}\right) = X(k\frac{t}{n}) + \epsilon_{k+1}$. où les variables ϵ_k sont des variables binomiales valant $\sigma\sqrt{t/n}$ avc probabilité $p = 1/2 + \frac{\mu}{2\sigma}\sqrt{t/n}$ et $-\sigma\sqrt{t/n}$ avec probabilité $1-p$., où σ et μ sont des constantes données. Alors quand n tend vers l'infini, $X(t) - X_0$ suit une loi normale d'espérance μt et de variance $\sigma^2 t$.*

Cette proposition va nous permettre d'énoncer un des résultats les plus célèbres et les plus utilisés de la finance de marché.

La formule de Black et Scholes

Considérons la valeur de l'option calculée dans le modèle discret :

$$C = \frac{1}{(1+r)^n} \sum_{i/u^i d^{n-i} S \geq K} C_n^i \pi^i (1-\pi)^{n-i} (u^i d^{n-i} S - K)$$

On peut la réécrire :

$$\begin{array}{rcl} C & = & \displaystyle\sum_{i/u^i d^{n-i} S \geq K} C_n^i \left(\frac{\pi u}{1+r}\right)^i \left(\frac{(1-\pi)d}{1+r}\right)^{n-i} S \\ & & \displaystyle - \left(\frac{1}{1+r}\right)^n \sum_{i/u^i d^{n-i} S \geq K} C_n^i \pi^i (1-\pi)^{n-i} K \end{array}$$

Que nous écrivons de manière condensée :

$$C = \Phi S - \frac{1}{(1+r)^n} \psi K$$

Cette expression mérite un commentaire.

Examinons le premier terme ΦS. Remarquons d'abord que $\pi u + (1-\pi)d = 1+r$, (voir plus haut). Considérons alors le processus binomial suivant :

$$\begin{array}{rcl} X(k+1) & = & \ln(S(k+1)) = \ln(S(k)) + \epsilon_{k+1} \\ \text{avec } \epsilon_{k+1} & = & \ln(u) \text{ avec probabilité } \dfrac{\pi u}{1+r} \\ \text{avec } \epsilon_{k+1} & = & \ln(d) \text{ avec probabilité } \dfrac{(1-\pi)d}{1+r} \end{array}$$

Le premier terme de l'équation donnant le prix du call est simplement égal à la valeur initiale S multipliée par la probabilité que le processus binomial atteigne une valeur finale $X(n) \geq \ln(K)$.

Le second terme est similaire. Considérons le processus binomial :

$$\begin{array}{rcl} Y(k+1) & = & \ln(S(k+1)) = \ln(S(k)) + \epsilon_{k+1} \\ \text{avec } \epsilon_{k+1} & = & \ln(u) \text{ avec probabilité } \pi \\ \text{avec } \epsilon_{k+1} & = & \ln(d) \text{ avec probabilité } (1-\pi) \end{array}$$

Le second terme de léquation donnant le prix du call est simplement égal à la valeur actualisée au taux r du prix d'exercice K multipliée par la probabilité que le processus binomial atteigne une valeur finale $Y(n) \geq \ln(K)$.

L'objectif est donc de calculer les lois de distribution des deux processus X et Y. *Avec* ce qui précède, si on opère un passage à la limite, on va trouver des distributions gaussiennes. Il s'agit alors tout simplement de trouver les paramètres de ces distributions gaussiennes limites de X et Y.

Considérons alors l'intervalle [0,t], subdivisé en n périodes.

D'après ce qui précède on doit poser, σ étant un paramètre donné:

$$\begin{aligned} \ln(u) &= \sigma\sqrt{\frac{t}{n}} \Longleftrightarrow u = e^{\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \\ \ln(d) &= -\sigma\sqrt{\frac{t}{n}} \Longleftrightarrow d = e^{-\sigma\sqrt{\frac{t}{n}}} \end{aligned}$$

Posons de la même manière :

$$1 + r = e^{\rho\frac{t}{n}} \Longleftrightarrow r \sim \rho\frac{t}{n}$$

Calculons la probabilité d'évolution du processus X (on pose $h = \frac{t}{n}$):

$$\begin{aligned} p_X = \frac{\pi u}{1+r} &= \frac{1}{1+r}\left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\right)u \\ &= \frac{1}{e^{\rho h}}\frac{e^{\rho h} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}e^{\sigma\sqrt{h}} \end{aligned}$$

Un développement limité en $\sqrt{h}$ donne immédiatement :

$$p_X = \frac{1}{2} + \frac{\rho + \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{h}$$

Calculons de même la probabilité d'évolution du processus Y .

$$p_Y = \pi = \left(\frac{(1+r)-d}{u-d}\right) = \frac{e^{\rho h} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}{e^{\sigma\sqrt{h}} - e^{-\sigma\sqrt{h}}}$$

Un développement limité en $\sqrt{h}$ donne immédiatement :

$$p_Y = \frac{1}{2} + \frac{\rho - \frac{\sigma^2}{2}}{2\sigma}\sqrt{h}$$

Proposition 30 *Le processus $X(t) - \ln(S)$ suit une loi normale (gaussienne) d'espérance $(\rho + \frac{\sigma^2}{2})t$ et de variance $\sigma^2 t$, ce qui revient à dire que $\frac{X(t)-\ln(S)-(\rho+\frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}$ suit une loi normale centrée réduite (d'espérance nulle et de variance 1)*

De même,le processus $Y(t) - \ln(S)$ suit une loi normale (gaussienne) d'espérance $(\rho + \frac{\sigma^2}{2})t$ et de variance $\sigma^2 t$.

Notation 31 *On note N la fonction de répartition de la loi gaussienne centrée réduite :*

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

(Il s'agit de $\pi = 3,14159265..$, ici!)

On a évidemment :

$$N(+\infty) = 1, N(x) = 1 - N(-x)$$

$N(x)$ mesure la probabilité qu'une variable aléatoire normale prenne une valeur inférieure à x.

Revenons alors à l'expression qui donne le prix de l'option :

$$C = \Phi S - \frac{1}{(1+r)^n}\psi K$$

Φ est la probabilité que $X(t)$ soit supérieur à $\ln(K)$, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
\Phi &= \Pr\left(X(t) \geq \ln(K)\right) \\
\Phi &= 1 - N\left(\frac{\ln(K) - \ln(S) - (\rho + \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\
\Phi &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-\rho t}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

Ψ est la probabilité que $Y(t)$ soit supérieur à $\ln(K)$, c'est à dire :

$$\begin{aligned}
\psi &= \Pr\left(Y(t) \geq \ln(K)\right) \\
\Psi &= 1 - N\left(\frac{\ln(K) - \ln(S) - (\rho - \frac{\sigma^2}{2})t}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\
\Psi &= N\left(\frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-\rho t}}\right) - \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}\right)
\end{aligned}$$

Proposition 32 *Le prix d'une option sur une action S, de "volatilité σ" au prix d'exercice K, exerçable à la date t est égal à :*

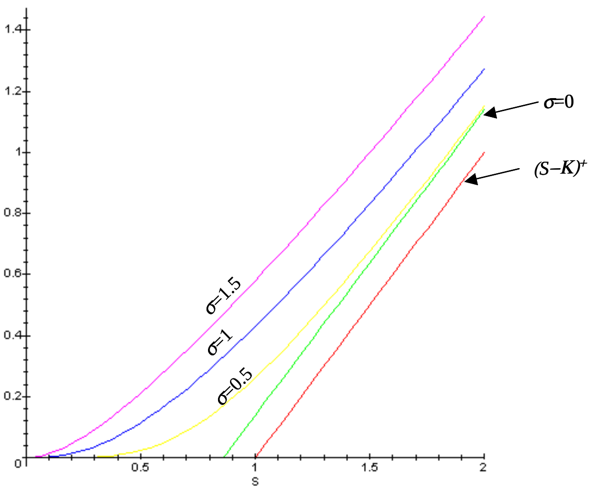
$$C = N(d_1)S - N(d_2)Ke^{-\rho t}$$

où

$$\begin{aligned}
d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-\rho t}}\right) + \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}} \\
d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{Ke^{-\rho t}}\right) - \frac{\sigma^2}{2}t}{\sigma\sqrt{t}}
\end{aligned}$$

Cette formule est la plus célèbre de la finance et est utilisée de manière quotidienne par tous les opérateurs sur les places financières pour estimer les valeurs théoriques des options ou pour estimer la volatilité en fonction du cours (volatilité implicite).

Le graphique suivant montre les variations de C quand S et σ varient pour $K = 1$ et $\rho = 15\%$ fixé.



Prix du Call en fonction de S et σ