Choix de portefeuille, MEDAF

(Capital Asset pricing Model)

Le principe de diversification

Dans le chapitre précédent nous avons décrit les principales caractéristiques du comportement "risquophobe". Cette modélisation nous a permis de mieux définir la notion de risque et même d'établir une gradation entre situations risquées. Ainsi, deux loteries ayant la même espérance, la première est plus risquée que la seconde si tout décideur risquophobe préfère la seconde.

L'objet de ce premier paragraphe est de donner un sens rigoureux à l'expression : "il ne faut pas mettre tous ses oeufs dans le même panier", qui est la traduction populaire du principe de diversification.

L'idée du principe de diversification est somme toute assez simple et repose sur un constat limpide : (sauf si elles sont parfaitement corrélées) la demi somme de deux variables aléatoires identiquement distribuées est moins risquée que chacune d'entre elles. Si on imagine deux paniers ayant chacun la même probabilité p de tomber (et donc de provoquer la perte des oeufs), mettre un oeuf dans chaque panier est moins risqué que les mettre tous les deux dans l'un.

En effet dans le premier cas on aura 0 oeufs avec probabilité p^2, 2 oeufs avec probabilité $(1-p)^2$, et 1 oeuf avec probabilité $2p(1-p)$. Dans le second 0 avec probabilité p et 2 avec probabilité $1-p$. Les probabilités des extrêmes, 0 et 2, ont diminué : de p à p^2 (soit une baisse de $p(1-p)$) et de $(1-p)$ à $(1-p)^2$ (même baisse!), alors que l'événement "modéré" 1, a vu sa probabilité augmenter d'exactement $2p(1-p)$.

Si $\widetilde{X}$ est la variable aléatoire donnant 1 si le premier panier reste intact et 0 s'il tombe, $\widetilde{Y}$ définie de la même manière pour le deuxième panier, on a $2\widetilde{X}$ et $2\widetilde{Y}$ sont plus risquées que $\widetilde{X}+\widetilde{Y}$.

Dans le cas de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées on peut énoncer le résultat général suivant :

Proposition 45 *si $\widetilde{x}_i$ sont n variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, alors $\forall \alpha_i$, n nombres réels positifs de somme 1 ($\sum \alpha_i = 1$), $\frac{\sum \widetilde{x}_i}{n}$ est moins risquée que $\sum \alpha_i \widetilde{x}_i$. (et donc en particulier que chacune des $\widetilde{x}_i$)*

Evidemment la situation est légèrement plus complexe lorsque les variables aléatoires sont corrélées. Considérons d'abord deux variables aléatoires $\widetilde{x}_1$ et $\widetilde{x}_2$ de même variance σ^2 mais non nécessairement indépendantes. Une étude de la variance permet de se faire une idée du risque d'une combinaison convexe des deux variables.

Considérons $t(\alpha)$:

$$t(\alpha) = \frac{\operatorname{var}(\alpha\widetilde{x}_1 + (1-\alpha)\widetilde{x}_2)}{\sigma^2}$$

$$= \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 2\alpha(1-\alpha)\frac{\operatorname{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)}{\sigma^2}$$

$t(\alpha)$ est inférieur à 1, car $\operatorname{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2) < \sigma^2$. Il est minimum pour $\alpha = 1/2$.

Si maintenant, $\widetilde{x}_1$ et $\widetilde{x}_2$ n'ont pas la même variance, avec par exemple $\operatorname{var}(\widetilde{x}_1) \leq \operatorname{var}(\widetilde{x}_2)$. On peut calculer :

$$\Sigma^2(\alpha) = \operatorname{var}(\alpha\widetilde{x}_1 + (1-\alpha)\widetilde{x}_2)$$

$$= \alpha^2 \operatorname{var}(\widetilde{x}_1) + (1-\alpha)^2 \operatorname{var}(\widetilde{x}_2) + 2\alpha(1-\alpha)\operatorname{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$$

La dérivée de cette fonction vaut :

$\frac{d\Sigma^2}{d\alpha} = 2\alpha(\operatorname{var}(\widetilde{x}_1) - cov(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)) - 2(1-\alpha)(\operatorname{var}(\widetilde{x}_2) - \operatorname{cov}(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2))$

Il existe un minimum entre 0 et 1 si $\frac{d\Sigma^2}{d\alpha}(0) \leq 0 \leq \frac{d\Sigma^2}{d\alpha}(1)$, c'est à dire si

$$\begin{aligned}\mathrm{var}\,(\widetilde{x}_2) - \ \mathrm{cov}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) &\geq 0\\ \mathrm{var}\,(\widetilde{x}_1) - \ \mathrm{cov}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) &\geq 0\end{aligned}$$

C'est à dire si

$$\mathrm{var}\,(\widetilde{x}_1) - \ \mathrm{cov}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2) \geq 0$$

Que l'on écrit :

$$\frac{\mathrm{cov}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)}{\mathrm{var}\,(\widetilde{x}_1)} \leq 1$$

$\frac{\mathrm{cov}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)}{\mathrm{var}(\widetilde{x}_1)}$ est appelé coefficient $\beta(\widetilde{x}_2/\widetilde{x}_1)$ de 2 par rapport à 1 : même si la variance de 2 est plus grande que celle de 1, une substitution de 2 à 1 permet de diminuer le risque de 1 si $\beta(\widetilde{x}_2/\widetilde{x}_1) \leq 1$. En terme de corrélation, si $\tau = \frac{\mathrm{cov}(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2)}{\sqrt{\mathrm{var}(\widetilde{x}_1)\mathrm{var}(\widetilde{x}_2)}}$ est le coefficient de corrélation, cela veut dire que $\tau\sqrt{var\,(\widetilde{x}_2)} \leq \sqrt{var\,(\widetilde{x}_1)}$ (Ceci est toujours vrai si $\tau \leq 0$). Dans ce cas une combinaison des deux actifs permet de diminuer le risque.

En revanche si tel n'est pas le cas il faut combiner les deux variables avec un coefficient négatif, c'est à dire vendre l'un des deux actifs à découvert.

Choix de portefeuille

Dans ce paragraphe on se propose d'analyser le problème de choix de portefeuille d'une manière générale. Un investisseur a 1 euro à "placer", comment doit-il les répartir entre les différents actifs disponibles? Evidemment la réponse dépend de son attitude au risque. Nous allons supposer ici que notre investisseur utilise le critère "moyenne-variance", c'est à dire qu'il évalue $E(\widetilde{v}) - \frac{1}{2}\theta\mathrm{var}(\widetilde{v})$ pour comparer les variables aléatoires.

On considère K actifs financiers, $k = 1, ..., K$. Le revenu de l'actif k est une variable aléatoire réelle $\widetilde{a}_k$: c'est le revenu (cash) aléatoire que procure cet actif dans le futur. Cette variable aléatoire est supposée connue grâce à des étude statistiques. On note p_k le prix, sur le marché, de l'actif k. Il est assez commode de définir le rendement de l'actif k comme la variable aléatoire qui mesure le revenu pour un euro investi : $\widetilde{R}_k = \frac{\widetilde{a}_k}{p_k}$. Il existe par ailleurs un actif sans risque, l'actif 0, qui rapporte R_0 (non aléatoire) euros par euro investi. Un portefeuille risqué est un vecteur z dont chaque composante z_k mesure la quantité d'actif k détenue.

Un portefeuille z procure donc un revenu aléatoire $\widetilde{v} = \sum \widetilde{a}_k\ z_k$ et coûte ${}^t zp$.

On peut écrire le revenu en fonction des rendements :

$$\widetilde{v} = \sum \frac{\widetilde{a}_k}{p_k} p_k z_k = \sum \widetilde{R}_k x_k = {}^t x\widetilde{R}$$

Où $x_k = p_k z_k$ est la dépense affectée à l'achat de l'actif k.

Supposons que notre investisseur ait un euro à répartir entre les différents actifs. Il doit donc choisir de répartir cet euro entre l'actif sans risque (x_0) et les actifs risqués $x = (x_1, ...x_K)$ avec[1] $x_0 + {}^t x\mathbf{1} = 1$. Cette stratégie lui rapporte pour cet euro, un revenu égal à $x_0 R_0 + {}^t x\widetilde{R}. = R_0 + {}^t x(\widetilde{R} - R_0\mathbf{1})$.

On pose $\widetilde{\rho} = \widetilde{R} - R_0\mathbf{1}$, le vecteur des rendements excédentaires par rapport à l'actif sans risque. Le revenu de l'euro investi est donc égal à $\widetilde{v} = R_0 + {}^t x\widetilde{\rho}$.

Le problème qui se pose pour cet investisseur est de choisir x de manière la plus rationnelle possible compte tenu de son attitude face au risque.

On peut étudier la stratégie (x_0, x) en fonction de son espérance (que rapporte-t-elle en moyenne) et de sa variance (quel risque comporte-t-elle).

On a :

$$\begin{cases} E(\widetilde{v}) = R_0 + {}^t xE(\widetilde{\rho}) \\ \mathrm{var}(\widetilde{v}) = E\left[(\widetilde{v} - E(\widetilde{v}))^2\right] \end{cases}$$

[1] $\mathbf{1}$ est le vecteur formés de K composantes toutes égales à 1

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{var}(\widetilde{v}) = E\left[({}^t x\widetilde{R} - {}^t xE(\widetilde{R}))^2\right] \\ = E\left[{}^t x(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))x\right] \\ = {}^t xE\left[(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))\right]x \end{array}\right.$$

Posons

$$\Omega = E\left[(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))^t(\widetilde{R} - E(\widetilde{R}))\right]$$

Ω s'appelle la matrice (symétrique) de variance covariance des actifs son élément ij est égal à $\sigma_{ij} = E\left[(\widetilde{R}_i - E(\widetilde{R}_i))(\widetilde{R}_j - E(\widetilde{R}_j))\right]$. σ_{ij} est la covariance entre les actifs *i et j. La* formule ci dessus montre que cettre matrice symétrique est positive (la forme quadratique associée est positive : ${}^t x\Omega x$ est une variance, c'est-à-dire une moyenne de carrés).

Proposition 46 *En résumé, la stratégie (x_0, x) rapporte $R_0 + {}^t xE(\widetilde{\rho})$ en moyenne avec une variance égale à ${}^t x\Omega x$.*

Notation 47 *Dans la suite si $\widetilde{v}$ est une variable aléatoire, on note v son espérance. Ici $\rho_i = E(\widetilde{\rho}_i)$, $R_i = E(\widetilde{R}_i)$.*

Comment choisir entre toutes les stratégies possibles? Clairement de deux stratégies donnant la même espérance, n'importe quel investisseur risquophobe préfère la stratégie de variance minimale. Fixons donc à notre investisseur un rendement espéré m et cherchons les vecteurs x de $\mathbb{R}^K$ qui minimisent la variance parmi les x donnant donnant m comme rendement espéré. Considérons le problème d'optimisation (P) :

$$(P)\left\{\begin{array}{c} \min\limits_x({}^t x\Omega x) \\ {}^t x\rho = m - R_0 \end{array}\right.$$

Définissons le nouveau produit scalaire :

Definition 48 *$< x, y >= {}^t x\Omega y$ est un produit scalaire (forme quadratique définie positive) notons $\| x \|$, la norme associée.*

Le problème devient :

$$(P)\left\{\begin{array}{c} \min\limits_x \| x \| \\ < \Omega^{-1}\rho, x >= m - R_0 \end{array}\right.$$

Cela consiste à trouver le point d'un hyperplan affine ($< \Omega^{-1}\rho, x >= m - R_0$), qui est à la distance minimale de l'origine. Ce point est évidemment la projection orthogonale x^* de 0 sur cet hyperplan. *Il* est donc défini par les deux équations suivantes, d'inconnues x^* et λ :

$$\left\{\begin{array}{c} x^* = \lambda\Omega^{-1}\rho \\ < \Omega^{-1}\rho, x^* >= m - R_0 \end{array}\right.$$

La première exprime que x^* est colinéaire au vecteur normal à l'hyperplan $\Omega^{-1}\rho$, La seconde exprime que le point de projection appartient à cet hyperplan affine.

- Une remarque importante mérite d'être faite : x^* est un vecteur qui est proportionnel au vecteur $\Omega^{-1}\rho$ qui ne dépend pas de m. Autrement dit, quel que soit le rendement espéré demandé, la structure du portefeuille risqué est identique. Par structure on entend la proportion relative des différents actifs risqués.

- Bien sûr on peut facilement résoudre le système précédent :

$$x^* = \frac{(m - R_0)}{{}^t\rho\Omega^{-1}\rho}\Omega^{-1}\rho$$

- Comment notre investisseur choisit-il le niveau m? Evidemment ceci résulte de son arbitrage entre moyenne et variance, il s'agit de maximiser en m :

$$E(\widetilde{v}) - \frac{1}{2}\theta var(\widetilde{v}) = m - \frac{1}{2}\theta(m - R_0)^2 \frac{1}{{}^t\rho\Omega^{-1}\rho}$$

Definition 49 *On appelle portefeuille de marché le portefeuille* $x^m = \frac{\Omega^{-1}\rho}{{}^t\mathbf{1}\Omega^{-1}\rho} = \mu\Omega^{-1}\rho$, *portefeuille qui ne comporte que des actifs risqués dans les proportions relatives définies par les solutions des problèmes* (P).

Le rendement de ce portefeuille est noté : $\widetilde{R}_m = R_0 + {}^t x^m \widetilde{\rho}$,

La variance de son rendement est :

$$var(\widetilde{R}_m) = {}^t x^m \Omega x^m$$

De plus on a :

$$\begin{aligned}
(\Omega x^m)_i &= \sum_j \sigma_{ij} x_j^m \\
&= cov(\widetilde{R}_i, \sum \widetilde{R}_j x_j^m) \\
&= cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)
\end{aligned}$$

Ce portefeuille s'appelle portefeuille de marché parce que, sous l'hypothèse d'investisseurs "moyenne-variance", ce qui précède montre que tous les individus demandent un portefeuille dont la composante risquée est proportionnelle à ce portefeuille. Il en résulte, que la somme de tous les portefeuilles détenus a la même structure (dans sa partie risquée). Bien sûr, un individu très risquophobe demandera peu de ce portefeuille risqué et concentrera son investissement sur l'actif sans risque. Au contraire, un individu moins risquophobe choisira un x_0 plus petit. Tout se passe comme si chaque investisseur achetait un morceau de la capitalisation boursière totale, morceau plus ou moins grand selon l'aversion!

Formule du MEDAF

Ce qui précède permet de trouver une des formules les plus célèbres de la finance!

On a :

$$\begin{aligned}
\Omega x^m &= \mu\rho \\
var(\widetilde{R}_m) &= {}^t x^m \Omega x^m = \mu {}^t x^m \rho = \mu(R_m - R_0)
\end{aligned}$$

Ceci implique :

$$\frac{\Omega x^m}{var(\widetilde{R}_m)}(R_m - R_0) = \rho$$

Ce qui s'écrit, composante par composante :

$$\frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)}{var(\widetilde{R}_m)}(R_m - R_0) = (R_i - R_0)$$

Proposition 50 *Pour n'importe quel actif* i, *sa surperformance moyenne par rapport à l'actif sans risque* $R_i - R_0$ *est proportionnelle à la surperformance du portefeuille de marché* $R_m - R_0$. *Le coefficient de proportionalité est le* β *de* i *par rapport au portefeuille de marché.*

$$\begin{aligned}
R_i - R_0 &= \beta_i(R_m - R_0) \\
\beta_i &= \frac{cov(\widetilde{R}_i, \widetilde{R}_m)}{var(\widetilde{R}_m)}
\end{aligned}$$

Quelques éléments de "corporate finance"

(Financement de l'entreprise)

Les différentes parties prenantes

Le financement et le contrôle d'une entreprise est, sauf cas exceptinnel, l'affaire de plusieurs parties prenantes (stakeholders). Les actionnaires y ont apporté du capital (stock holders), et à ce titre sont les "propriétaires" de l'entreprise. Les prêteurs (debt holders), ont des créances sur l'entreprise qui leur emprunte des fonds. Les dirigeants de l'entreprise, choisis par les actionnaires, prennent les décisions au nom de ceux-ci, décisions qui, évidemment, ont une incidence sur la vie de l'entreprise.

Très schématiquement, pour assurer la production, l'entreprise a besoin de financement. Pour simplifier on peut imaginer que ce financement est simplement égal au besoin de fonds de roulement qui représente l'avance permanente de dépenses que l'entreprise doit faire avant de réaliser des recettes. Capital et endettement sont les deux principales sources de financement.

La rémunération de ces "créances" (claims) se fait grace au bénéfice (excédent d'exploitatoion) réalisé par l'entreprise. Les différentes formes de financement (capital, dette, dette convertible, action prioritaire....) sont simplement des contrats qui spécifient les droits des détenteurs (claim holders) sur ce revenu généré par l'entreprise. La structure de financement d'une entreprise doit s'interpréter comme la façon qui a été choisie de partager le gâteau entre les "convives". Le problème principal qui se pose est alors le suivant : la structure de financement a-t-elle une incidence sur l'activité de l'entreprise? La façon de partager le gateau a-t-elle une influence sur sa taille? C'est le principal problème examiné par la "corporate finance". Nous verrons ici quelques intuitions sur ce problème.

A ce de financement s'ajoute celui de séparation plus ou moins grande entre financement et contrôle. Les actionnaires délèguent la gestion à des manageurs qui n'ont pas nécessairement des intérêts en ligne avec ceux des propriétaires. Dans un monde où l'information serait parfaite, c'est à dire dans lequel l'actionnaire pourrait observer parfaitement le comportement des dirigeants et ainsi lui imposer sa ligne, le problème de délégation ne se pose pas. En revanche, dè lors que l'information est asymétrique, il faut prévoir des instruments incitatifs dont l'objectif est d'aligner les intérêts des actionnaires et des dirigeants.

Les deux formes basiques de financement

Dans ce paragraphe nous donnons une vision statique sur une période, évidemment caricaturale de l'entreprise. Imaginons une entreprise dont le revenu (excédent d'expolitation) est aléatoire donné égal à $\widetilde{R}$.

L'ensemble des parties prenantes (claim hoders) doivent se répartir $\widetilde{R}$.

Dette

Par définition de la "dette simple", les prêteurs ont un droit prioritaire sur R : si D est le montant de la dette (ce que doit l'entreprise), la rémunération des prêteurs s'établit à :

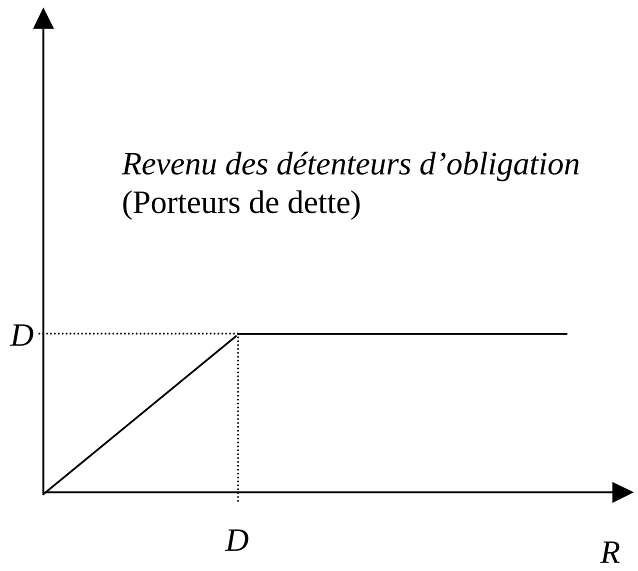
$$\widetilde{a}_d = \min(\widetilde{R}, D)$$

La dette, dans ce cas devient un actif financier incertain du fait du risque de défaut ($R < D$) de l'entreprise. La signature d'une obligation (bond) est justement associée à la probabilité de défaut. Une bonne signature signifie que la probabilité de défaut est faible. Il existe des agences de notation (Moody's, Standard & Poors) dont l'activité est de noter (AAA,AA,A,BBB,......) les entreprises en fonction de leur capacité de remboursement de leur dette. Les "Junk bonds" sont les titres (dette émises) par les entreprises dont la signature n'est pas bonne.

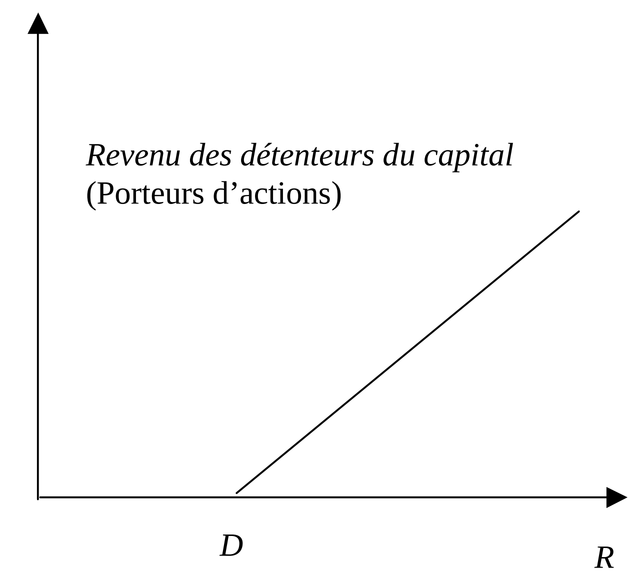
Actions/capital

Les détenteurs du capital sont alors "créanciers résiduels" (residual claimants) : leur revenu est ce qui reste après avoir servi la dette :

$$\widetilde{a}_c = (\widetilde{R} - D)^+$$



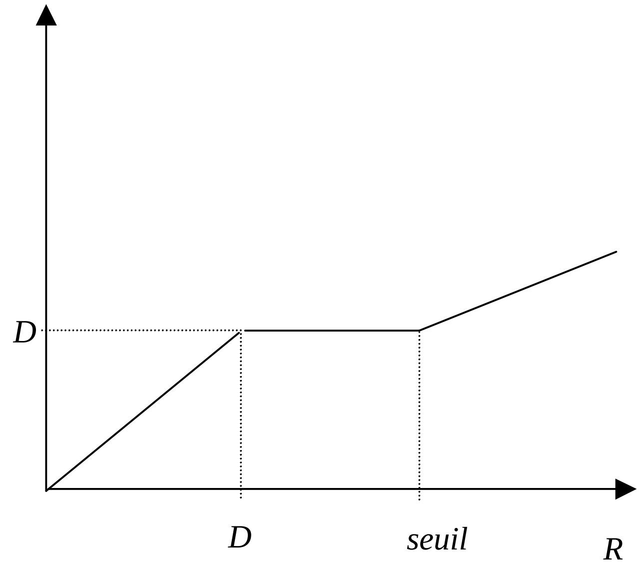
Revenu des porteurs en fonction de l'excédent de l'entreprise



Autres créances

On peut concevoir tout un ensemble de créance intermédiaires entre la dette et l'action. Par exemple il existe des degrés de priorité dans les dettes. Les dettes prioritaires seront servies en premier puis les dettes secondaires, puis enfin les actionnaires.

Les oblgations convertibles en action (selon un taux fixé à l'avance) permettent au détenteur de dette de prendre une option en cas de résultats favorables. Le profil de revenu de ce type de créance est alors le suivant.



dette convertible en actions

Valeur totale de l'entreprise

Par définition, la valeur totale de l'entreprise est la somme des valeurs des titres (obligations et actions) qu'elle a émis. Si par exemple on représente l'aléa par un ensemble d'états de la nature E, la valeur des titres peut se calculer par la formule des chapitres précédents ($q(e)$ représente le prix d'un euro dans l'état e), la valeur des obligations est:

$$P_d = \sum_E q(e) \min(R(e), D)$$

La valeur des actions :

$$P_a = \sum_E q(e)(R(e) - D)^+$$

On voit alors immédiatement que :

$$\begin{aligned} P_a + P_d &= \sum_E q(e) \left\{ (R(e) - D)^+ + \min(R(e), D) \right\} \\ &= \sum_E q(e) R(e) \end{aligned}$$

C'est à dire que la valeur de l'entreprise ne dépend pas de D c'est à dire de la structure de financement. Elle est égale à la valeur (de marché) de l'excédent d'exploitation.

Ce résultat théorique connu sous le nom de "théorème de Modigliani-Miller", énonce que dans une économie où l'information est parfaite, la structure de financement est indépendante de la valeur totale de l'entreprise. Ce résultat est évidemment en contradiction avec l'expérience commune, et une grande partie de la finance d'entreprise est consacrée à l'analyse des situations dans lesquelles il ne s'applique pas, c'est à dire de situations dans laquelle, la taille du gâteau est affectée par la méthode de partage!

En effet lorsque l'information est imparfaite, les prêteurs peuvent mal connaître le risque associé à l'entreprise. Ils peuvent aussi avoir des difficultés à contrôler l'efficacité du management, en particulier l'effort que celui ci engage pour rembourser les dettes. Ces deux types d'imperfection de marché sont telles que la structure de financement aura des implications incitatives et le résultat de l'entreprise ne sera pas indépendant de sa structure de financement.

Prise de risque

La forme des revenus touchés par les différentes parties prenantes a une importance en matière de prise de risque. En particulier, le revenu des actionnaires est une fonction convexe du résultat. Il en résulte que les actionnaires sont poussés, entre deux décisions donnant la même espérance (la même valeur totale) à choisir la plus risquée! Il en résulte évidemmment une perte pour les détenteurs d'obligation qui eux ont une fonction concave du résultat!

Pour se protéger de ce genre de "déconvenues", dans un monde où l'information est parfaite, les porteurs de dettes completent le contrat par des "covenant" qui contraignent le management à contenir le risque. La convertibilité des obligations en action est une autre manière de se protéger contre ce phénomène.