Evaluation par arbitrage, incertitude

L'objectif de ce chapitre est de présenter les principes de bases qui président aux méthodes d'évaluation par arbitrage. Il va nous permettre aussi de fixer quelques notations qui nous serviront par la suite.

Incertitude

Nous allons adopter ne modélisation de l'incertitude extrêmement rudimentaire. Un état du monde e est une réalisation particulière de l'ensemble des possibles. Par exemple, à la date 0 l'état du monde à la date 1 est incertain. On note $E = \{e\}$, l'ensemble des possibles. A priori ici on supposera que l'ensemble E est fini.On dit que l'on est dans une situation de risque lorque l'état e n'est pas connu à l'avance mais que l'on connaît la probabilité de chacun des états de E. On dit que E est un espace probabilisé fini. On parle d'incertitude lorsqu'on connaît les possibles mais pas les probabilités, et d'incertitude radicale lorsque l'on ne sait rien du tout! Ici nous nous plaçons dans le cas de risque ou d'incertitude. Le passage au monde continu est un peu compliqué et relève plutôt d'un cours de probabilités ou de statistiques. Ici, pour faire comprendre les intuitions nous n'avons besoin que d'une description "discrète" de l'alea. Evidemment cela perd un peu en réalisme.

Comme on l'a vu dans l'introduction, les ressources des décideurs ou des acteurs économiques sont soumis à des aléas. On décrira ce phénomène en disant que la "richesse" ou le "revenu" d'un agent est une variable aléatoire (c'est-à-dire une application de E dans $\mathbb{R}$.

De la même manière, un actif financier est un bien économique particulier qui procure un revenu aléatoire. Par exemple, une action d'une entreprise donne droit à une participation à ses bénéfices qui sont aléatoires. Une action est un actif financier risqué au sens ou son revenu est aléatoire.

A priori, on peut être surpris que des individus ayant "peur" du risque achètent des actifs financiers risqués. Une partie de la réponse à cette question tient dans le fait que certains acteurs ont besoin de "se couvrir" c'est à dire d'acheter des actifs dont l'aléa vient en quelque sorte neutraliser sa propre exposition au risque.

L'objet de ce chapitre n'est pas de modéliser le comportement de demande ou d'offre d'actif. Il s'agit ici de décrire l'un des instruments fondamentals de la finance : l'évaluation par la méthode d'arbitrage.

Actifs financiers

On raisonne ici sur deux dates : la date 0 à laquelle s'opèrent les transactions et la date 1, date à laquelle on encaisse les revenus aléatoires associés.

Notation 12 *On note E l'ensemble des états de la nature (de la date 1). On suppose que E est fini de cardinal E (par abus de notation).*

Definition 13 *Un actif financier est une variable aléatoire :*
$\widetilde{d} : E \to \mathbb{R}^+,$
$e \to d(e)$
On note par la lettre p le prix de cet actif à la date 0
Acheter l'actif à la date 0 *entraine ainsi un décaissement p et donne droit au revenu aléatoire $a(e)$ à la date* 1.

On suppose qu'il existe à la date 0 un marché sur lequel K actifs financiers différents sont disponibles. On peut ainsi résumer l'ensemble des données par le tableau composé du vecteur prix et de la matrice des revenus :

$$p = \left[p_k\right]_{K,1} D = \left[d_{ki} = d_k(e_i)\right]_{K,E}$$

Par construction les vecteurs "colonne" sont associés aux actifs et à l'indice k et les vecteurs lignes aux états de la natures (à l'aléa).

Definition 14 *On appelle portefeuille, ou stratégie d'achat-vente, un vecteur z de $\mathbb{R}^k$ qui spécifie la quantité (positive ou négative) de chaque actif détenue (ou "achetée") par un décideur.*

La k ième composante du vecteur portefeuille est la quantité détenue d'actif correspondant . Il faut noter qu'une quantité négative est possible. On parle alors de "vente à découvert" : le décideur s'engage à payer les revenus correspondants à l'actif en question. Par exemple, vendre une action à découvert signifie simplement que le jour venu je dois donner le revenu associé à cette action.

A l'échéance le portefeuille z donne le revenu aléatoire v_z donné par la formule :

$$v_z = {}^t zD$$

v_z est un vecteur ligne dont chaque composante représente le revenu dans l'état de la nature correspondant.

Le coût à la date 0 du portefeuille z est évidemment égal à :

$$c(z) = {}^t zp$$

Definition 15 *On dit que le marché est complet si et seulement si on peut générer par au moins un portefeuille n'importe quel profil de revenu :*

$$\forall v \in \mathbb{R}^E, \exists z \in \mathbb{R}^K, {}^t zD = v$$

On comprend bien l'intérêt de la notion de marché complet : pouvoir générer n'importe quel revenu aléatoire signifie, en particulier que l'on peut "immuniser" n'importe quel risque auquel on est exposé. Si par exemple on a des recettes futures en dollar. Si les marchés sont complets on peut s'assurer à l'avance du taux de change en achetant l'actif financier qui varie en sens inverse.

Proposition 16 *Le marché est complet si et seulement si $rg(D) = E$, c'est–à–dire en particulier, si $K \geq E$: il y a au moins autant d'actifs que d'états de la nature.*

Dans le cas de marché complet, il est inutile d'avoir des actifs "redondants", on suppose alors que $K = E$. et la matrice A est carrée régulière.

Dans le cas de marchés complets il est intéressant de définir ce qu'on appelle les actifs d'Arrow, (du nom d'un prix Nobel d'Economie). Les actifs d'Arrow sont simplement les actifs qui procurent les profils correspondants à la base canonique de $\mathbb{R}^E$ (ce sont des sortes de zéro-coupons...):

Definition 17 *L'actif d'Arrow i donne 1 euro dans l'état e_i et 0 sinon :*
$\delta_i = (0, 0, ..., 1, 0, 0)$.

Quel est le coût de cet actif?
Le portefeulle associé est : ${}^t z = \delta_i D^{-1}$, son coût est $q(e_i) = {}^t zp = \delta_i D^{-1} p$

Proposition 18 *Si le marché est complet, le vecteur $q = D^{-1}p$ est le vecteur prix des actifs élémentaires d'Arrow. q_i représente le prix qu'il faut payer pour avoir un euro dans l'atat i et zéro sinon.*

Que se passe-t-il si la matrice D est telle qu'une des composantes du vecteur $D^{-1}p$ est négative? La situation dans ce cas serait asssez amusante. On pourrait encaisser de l'argent aux deux périodes. la valeur négative du prix à la date 0 et 1 euro si l'état de la nature se réalise à la date 1. Voila une façon de s'enrichir sans risque. On dit qu'il y a absence d'opportunité d'arbitrage si ce n'est pas possible.

Definition 19 *Si le marché est complet, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que le vesteur $D^{-1}p$ a toutes ses composantes strictement positives.*

Marché incomplet

Supposons maintenant, avec plus de réalisme que $K < E$. Peut-on généraliser ce qui précède?

Definition 20 *On dit que z est un portefeuille d'arbitrage si :*

$$\begin{cases} {}^t zD \geq 0 \\ {}^t zp \leq 0 \\ \text{avec une inégalité stricte} \end{cases}$$

(dans cette définition ≥ 0 pour un vecteur, veut dire composante par composante)

Definition 21 *On dit que le marché vérifie la condition d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) s'il n'existe pas de portefeuille d'arbitrage.*

Evidemmment, l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que si deux actifs donnent les même revenus ils doivent avoir le même prix (sinon la différence des deux serait un portefeuille d'arbitrage). Cette remarque est à la base de la technique centrale d'évaluation des actifs financiers : la technique d'évaluation par "réplication". Si en combinant des actifs disponibles on arrive à reconstituer les revenus d'un autre actifs, alors le prix de cet actif est égal au prix de la combinanison.

Il existe un théorème de la finance qui permet de caractériser les marchés AOA :

Proposition 22 *Un marché est AOA si et seulement si il existe un vecteur q à composantes strictement positives tel que :*

$$p = Dq$$

Le prix de l'actif k est égal à la valeur "moyenne actualisée par q" de ses revenus :

$$p_k = \sum_E d_{ki} q_i$$

Remarquons que le prix de n'importe quel portefeuille s'exprime de la même façon :

$${}^t zp = {}^t zDq = v_z q = \sum_E v_i q_i$$

- Pour évaluer un portefeuille, ou le prix d'un actif "composite", il suffit de connaître le vecteur q.
- Nous verrons dans le chapitre suivant une application centrale de ce résultat à la valorisation d'options.

Une remarque centrale mérite d'être faite. Que vaut l'actif qui donne 1 dans tous les états de la nature? Par application directe de ce qui précède on trouve : $\sum_E q_i$. Or on sait depuis le chapitre précédent que le prix de cet actif s'écrit (par définition du taux d'intérêt sur 1 période) $\frac{1}{1+r_0^1}$. Si l'on pose $\pi_i = (1 + r_0^1) q_i$. On a $\sum_E \pi_i = 1$. π est une probabilité qui (a priori) n'a pas de lien avec la vraie probabilité. On verra par la suite comment π et la vraie proba sont reliées. On en déduit :

$$\begin{aligned} \text{prix du portefeuille z} \quad &: \quad {}^t zp = \frac{1}{1+r_0^1} \sum_E \pi_i v_i \\ \text{c'est-à-dire} \quad &: \quad {}^t zp = \frac{1}{1+r_0^1} \, \mathrm{E}_\pi [v] \\ & \qquad \text{Espérance (sous } \pi \text{) actualisée des revenus} \end{aligned}$$

Remarques finales

Evaluer un actif par AOA suppose de calculer le (un) vecteur q. Quand les marchés sont complets, en particulier, cette méthode est très puissante pour évaluer les produits dérivés c'est à dire les actifs dont les revenus sont contingents au comportement. d'autres actifs. L'exemple le plus simple est celui concernant la valorisation d'options. Une option est un actif qui donne le droit d'acheter un autre actif à un prix fixé à l'avance. On voit facilement que le revenu de cet actif dérivé est conditionné au cours de l'actif sous jacent.

Quand les marchés ne sont pas complets, l'imaginantion des financiers est sans bornes et crée de manière permanente de nouveaux actifs qui permettent de tenir compte d'états de la nature non "couverts" par les actifs disponibles. Par exemple, les actifs "climatiques" sont des actifs dont les revenus sont contingents au climat. Les actifs "catastrophes" sont des actifs contingents aux événements catastrophiques...

.