

Section complémentaire : forwards et futures

Les forwards et les futures sont des marchés à terme : on convient à la date 0 (aujourd'hui) d'acheter (ou de vendre) une quantité d'un certain produit (matière première, produit agricole, or, devise, ou même produit financier) à une date t future, à un prix fixé aujourd'hui, livraison et règlement se faisant à la date t .

Les forwards et les futures se distinguent cependant dans la manière d'organiser cette transaction. Un "forward" est un contrat de gré à gré - en anglais "over the counter (sur le comptoir)", entre deux protagonistes qui s'engagent de manière privée, sur une transaction spécifique. Par exemple Mr A s'engage le 1^o janvier à acheter à Mr B 100 onces d'or à 700\$ l'once le 1^o juillet. Livraison et paiement se feront le premier juillet.

Ce genre de contrat est évidemment susceptible de mal se terminer : il existe un risque de contrepartie. Supposons par exemple que le 1^o juillet l'or cote 720\$ l'once. Mr B aura la tentation de faire défaut, c'est à dire de ne pas livrer l'or.

Une deuxième remarque mérite d'être faite : il n'est pas besoin que MrB possède l'or qu'il a promis. A l'échéance il suffit d'opérer un règlement en cash entre acheteur et vendeur. Si le prix de l'or au comptant (spot) est plus élevé que le prix négocié à terme, le vendeur paie la différence à l'acheteur.

Ces deux remarques ont conduit à la création de marché de futures. Ces marchés portent sur des transactions standardisées (par exemple 100 onces d'or 1^o juillet). Acheteurs et vendeurs agissent indépendamment et un intermédiaire se charge du rôle de chambre de compensation (clearing house).

Supposons par exemple que MrA achète le 1^o janvier un contrat "100 onces d'or juillet" à 700\$ l'once. 700\$ est le prix coté pour ce contrat le 1^o janvier mais il ne sera effectivement payé que le 1^o juillet. Pour éviter le risque de défaut on opère cependant des appels de marge : si le 2 janvier le "100 onces d'or juillet" cote 710\$, la chambre de compensation opère un appel de marge des vendeurs vers les acheteurs de $10 \times 100 = 1000$ \$ par contrat. et ainsi de suite. Le 1^o juillet, par définition, le cours du contrat "100 onces d'or juillet" est strictement égal au prix spot de 100 onces d'or, de sorte que le bilan global est exactement le même qu'avec un forward (sans échange matière).

Absence d'opportunité d'arbitrage

Dans cette section nous allons voir comment les prix "futures" et les prix spots sont reliés. Nous allons commencer par des futures sur des produits stockables (or, devises, certaines matières premières...)

Notation 10 on note p_t^T le prix (coté à la date t) pour livraison et paiement à la date T . On note $B(t, T)$ le prix à la date t de l'obligation zéro coupon de maturité $(T - t)$ (c'est le prix que l'on doit payer à la date t pour avoir 1 euro à la date T)

- $p_t^T B(t, T)$ est donc le prix que l'on doit payer à la date t pour disposer d'une unité du produit à la date T
- Il existe une autre façon d'obtenir la même chose : acheter le produit immédiatement et le stocker! Soit alors s le coût de stockage unitaire prévisible sur la durée $T - t$ et payé (pour simplifier) en fin de période.

Proposition 11 L'absence d'opportunité d'arbitrage impose :

$$\begin{aligned} p_t^T B(t, T) &= p_t^t + B(t, T)s \\ p_t^T &= (1 + R(t, T - t))^{T-t} p_t^t + s \end{aligned}$$

où $R(t, T - t)$ est le taux d'intérêt (par période) associé à la maturité $T - t$.

Dès lors que s est positif, p_t^T est plus grand que le prix au comptant de la date t . Il existe cependant des cas où p_t^T est plus petit. Dans ce cas tout se passe comme si s était négatif : le fait de disposer du produit entre t et T génère un bénéfice. La possibilité de pouvoir en disposer à tout instant a une valeur positive.

Application à un marché à terme monétaire

Le produit standardisé (contrat sous-jacent) est ici un emprunt standardisé: c'est ce qu'on appelle un *emprunt notionnel*. Celui-ci est déterminé par sa maturité et son type. Considérons par exemple les prêts interbancaires à trois mois (un quart d'année), au comptant, sur les marchés non européens, ce type de prêt interbancaire se traite à un taux d'intérêt appelé LIBOR 3mois. C'est un contrat standard de nominal 1 000 000\$. Il s'agit de prêter ou d'emprunter 1 000 000 \$ sur 3 mois.

Avec les notations du cours, considérons le marché à terme de ce type de contrat. Fixons la période de référence à l'année. Vu de la date 0, un contrat à l'échéance t procure (pour l'acheteur) un flux négatif de 1M\$ à la date t et un flux positif égal à $1M(1 + f_0(t)\frac{1}{4})$ trois mois après. $f_0(t)$ est le taux d'intérêt annuel associé coté à la date 0 pour la date t .

La relation du cours nous informe que l'absence d'opportunité d'arbitrage implique (en M\$):

$$\begin{aligned} -B(0, t) \times 1 + B(0, t + 1/4) \times 1 \times \left(1 + f_0(t)\frac{1}{4}\right) &= 0 \\ \left(1 + f_0(t)\frac{1}{4}\right) &= \frac{B(0, t)}{B(0, t + 1/4)} \end{aligned}$$

Ainsi théoriquement, si à la date 0, la courbe des taux est bien définie, alors le taux à terme est lui aussi parfaitement défini.

$$\begin{aligned} \left(1 + f_0(t)\frac{1}{4}\right) &= \frac{(1 + R(0, t + 1/4))^{t+1/4}}{(1 + R(0, t))^t} \\ f_0(t) &\simeq R(0, t + 1/4) + 4t(R(0, t + 1/4) - R(0, t)) \end{aligned}$$

