Obligation : transfert dans le temps

Dans ce premier chapitre nous introduirons les principales notions concernant les obligations. Les principes élémentaires de la notion d'arbitrage y sont décrits. Une application simple aux marchés dérivés y est présentée.

Une obligation est un emprunt émis par une entreprise ou un gouvernement. Elle constitue une promesse de remboursement sous la forme de versements échelonnés dans le temps. Cet actif financier peut lui même être échangé sur le marché. Par exemple, un particulier qui a acheté un emprunt d'état (donc qui a versé de l'argent) peut le revendre sur le marché à tout instant : il échange des recettes échelonnées dans le futur (le remboursement par l'Etat) contre une recette immédiate (le prix de vente de l'obligation). Selon le "terme" c'est à dire l'horizon des titres échangés, on parlera du marché obligataire (de quelques mois à plusieurs années) ou du marché monétaire (du jour à quelques mois).

A priori il existe de multiples formes d'obligations. Nous considérons ici les obligation à revenus fixes. Pour celle-ci il n'y a aucun aléa sur les montants des échéances qui sont fixées dès le début du contrat. Le seul risque éventuel est le défaut de l'emprunteur qui pourrait ne plus être en mesure d'honorer les engagements. Ce risque (que l'on appelle risque de signature) sera abordé dans la fin du cours où nous examinerons les problèmes spécifiques au financement de l'entreprise.

Dans toute la suite (jusqu'à nouvel ordre) nous nous plaçons à la date 0 et considérons des obligations qui spécifient des flux futurs. Ainsi nous examinons le marché à la date 0 de produits qui spécifient des flux futurs.

Definition 1 *Une obligation d à la date 0 est définie par les versements $d(t)$ qu'elle procure à chaque date t (future) et son prix p à la date 0.* $d = (d(1), d(2).....d(t)...)$

$T = \max(t,\, d(t) \neq 0)$ *est appelée maturité de l'obligation. Si $T = +\infty$, d est appelée rente perpétuelle.*

En général les $d(t)$ sont positifs, mais rien n'empêche qu'il ne soient quelconques. Il existe cependant des profils type que nous décrivons brièvement ici :

Definition 2 *- Obligations in fine : $\forall t < T$ $d(t) = c$, $d(T) = c + N$, où N est appelée "valeur faciale"., c le coupon et $r = c/N$ est le "taux d'intérêt nominal" de l'obligation. Cette obligation est proportionnelle à $(r, r, ...r, ...(1 + r))$.Lorsque l'emprunteur émet l'obligation et que $p = V$ on dit qu'elle est émise au pair.*

- Obligations à annuité constantes : $d(t) = a$ (proportionnelle à $(1, 1, ..., 1)$)

- Obligation à "zéro-coupon" de maturité T notée δ_T : $\forall t < T$ $\delta_T(t) = 0$, $\delta_T(T) = 1$: $(0, 0, ..., 0, 1)$.

Il est clair que le prix de ces obligations dépend de l'offre et de la demande de ces actifs. Cependant, on peut faire quelques remarques de bon sens sur des relations nécessaires que doivent vérifier les prix de ces actifs.

- Remarque 1 : si d_1 et d_2 sont deux obligations dont les prix sont p_1 et p_2. L'obligation qui procure les revenus $d(t) = d_1(t) + d_2(t)$ doit avoir comme prix $p = p_1 + p_2$.
- Remarque 2 : l'obligation qui rapporte $\lambda d(t)$ doit avoir le prix λp

Ces remarques sont moins évidentes qu'il n'y paraît. Elles reposent sur un raisonnement que l'on appelle raisonnement d'arbitrage. Supposons par exemple, par l'absurde, que $p > p_1 + p_2$. Un investisseur pourrait acheter les obligations d_1 et d_2 et revendre immédiatement l'obligation qui procure $d_1(t) + d_2(t)$ en faisant un bénéfice immédiat et potentiellement infini! L'idée essentielle des modèles d'évaluation des actifs financiers repose sur l'hypothèse qu'il ne peut y avoir d'opportunité d'arbitrage (c'est à dire de gain immédiat sans prise de risque en combinant des opérations d'achat et de vente).

Ces hypothèses impliquent que le prix des obligations doit être une forme linéaire du vecteur des versements. L'expression de cette forme linéaire est simple dès lors qu'on connaît le prix des obligations à zéro coupon qui constituent une base canonique de l'ensemble des obligations. En effet n'importe quelle obligation est une combinaison linéaire (triviale) d'obligations zéro-coupon. $d = \sum_{t=1}^{\infty} d(t)\delta_t$

Notation 3 *On note $B(t)$ le prix de l'obligation zéro coupon de maturité t : $\delta_t = (0, 0, ...0, 1)$*

Proposition 4 *Si toutes les obligations zéro coupon de maturités entre 0 et $T_{\max}$ sont disponibes et cotées sur le marché, alors l'absence d'opportunité d'arbitrage implique que le prix d'une obligation quelconque de maturié inférieure à $T_{\max}$ est égale à la "valeur actualisée" de ses versements. Le facteur d'actualisation est égal au prix de l'obligation zéro coupon correspondante.* $p = \sum_{t=1}^{T_{\max}} B(t)d(t)$

Zéro-coupons, courbe des taux, taux actuariel

Sur une période, le prix d'une obligation zéro coupon, par définition du taux d'intérêt vérifie: $B(1) = \frac{1}{1+r}$. En effet, pour pouvoir encaisser 1 euro demain, il faut débourser aujoud'hui $\frac{1}{1+r}$! Comment alors interpréter $B(2)$, $B(t)$?

L'analyse de la structure des prix des zéro-coupons est assez instructive. Pour faire cette analyse, examinons le marché, non seulement à la date 0 mais aussi à la date 1. Nous noterons $B(i,t)$ le prix à la date i de l'obligation zéro-coupon de maturité $t-i$ (elle donne droit à un euro à la date t).

Univers déterministe

Supposons que l'économie soit sans aléa. A la date 0 $B(0,1)$ est le prix de l'obligation zéro coupon sur une période, $B(0,2)$ le prix de celle de maturité 2.A la date 1, la nouvelle obligation zero coupon de maturité 1 qui rapportera 1 à la date 2 coûtera $B(1,2)$(valeur connue dès la date 0, s'il n'y a pas d'incertitude!) à la date 1. A la date 0 on peut alors obtenir 1 euro à la date 2 de deux manières : la première consiste à acheter une obligation zéro coupon de maturité 2 (cela coûte $B(0,2)$). La deuxième façon consiste à prévoir d'acheter à ladate 1 une obligation qui coutera $B(1,2)$à la date 1. Pour avoir cette somme il faut acheter $B(1,2)$ obligations zero coupon de maturité 1 à la date 0 ce qui coute $B(0,1)B(1,2)$.On a donc, en univers déterministe :

- $$B(0,2) = B(0,1)B(1,2)$$

  Plus généralement :

  $$B(0,t) = \prod_{s=0}^{t-1} B(s,s+1)$$

Supposons par exemple une économie stationnaire au sens où $B(s,s+1)$ est constant égal à $\frac{1}{1+r}$. ceci veut simplement dire que les taux d'intérêt de court terme ne varient pas. On a alors $B(0,t) = \frac{1}{(1+r)^t}$.

Proposition 5 *Dans un monde stationnaire sans aléa le prix de n'importe quelle obligation de maturité finie s'exprime comme la valeur actualisée de ses versements :*

$$p = \sum_{t=1}^{T} \frac{d(t)}{(1+r)^t}$$

Réciproquement, on peut définir le taux implicite d'une obligation, comme le taux constant qui soutient son prix.

Definition 6 *On appelle taux actuariel d'une obligation $(p, d(t))$ (où $d(t) \geq 0$) l'unique solution en r de l'équation* $p = \sum_{t=1}^{T} \frac{d(t)}{(1+r)^t}$.

Courbe des taux

A la date s étant donné l'ensemble des prix $(B(s,1),..,B(s,t)...)$ des zéro coupons. On définit la courbe des taux comme les taux sur une période $R(s,T)$ en fonction de la maturité T :

Definition 7 *Etant donnés les prix $B(s,s+T)$, par définition, la courbe des taux à la date s est la fonction $T \to R(s,T)$ définie par:*

$$B(s,s+T) = \frac{1}{(1+R(s,T))^T}$$

$R(s,T)$ est ainsi le taux actuariel de l'obligation zéro coupon de maturité t.

$$R(s,t) = \left(\frac{1}{B(s,s+T)}\right)^{1/T} - 1$$

La monotonie de $R(s,.)$ est très variable, on peut tout aussi bien avoir $R(s,.)$ croissante ou décroissante.

Le passage de $R(s,t)$ à $R(s+1,t+1)$ est appelé "évolution de la courbe des taux".

Détermination des zéro-coupons

Dans la vie réelle il n'existe pas de zéro coupon de telle sorte qu'il n'est pas directement possible d'observer les prix élémentaires $B(s,t)$.

En général on parvient à estimer ces prix en opérant des régressions multiples sur les produit existants.

Supposons que l'on ait K obligations disponibles sur une maturité $T \leq K$. On a :

$$p_k = \sum_{t=1}^{T} B(s,t) d_k(t)$$

En régressant p sur les $d(t)$, on déduit des estimateurs de B.

Dynamique des taux courts

Evidemment le monde réel s'écarte de la référence stationnaire sans alea. Des événements aléatoires non connus à la date 0 peuvent survenir à la date 1 et peuvent modifier le prix des zéro-coupons.

En univers déterministe on a toujours :

$$B(s,t) = \prod_{i=s}^{t-1} B(i,i+1)$$

De sorte que la donnée de l'évolution de $B(i,i+1)$ suffit à déterminer tous les prix de tous les zéro coupons.

Lorsque l'on introduit l'aléa, les prix $B(s,t)$ ne sont pas connus avant la date s. Cependant l'analyse qui précède nous permet de définir le conept de taux à terme.

Contrat à terme

L'analyse qui précède est un instrument puissant pour évaluer ce que l'on appelle les contrats à terme.

Definition 8 *Marché à terme. On parle de marché à terme lorsque les conditions de transaction sur les flux futurs sont décidés à l'avance : on décide à la date 0 (sans encaissements ni décaissements à cette date) d'opérer une transaction dans le futur, le prix de cette transaction étant fixé à la date 0.*

Taux forward

Supposons qu'un investisseur achète une obligation à zéro coupon de maturité $t+1$. Il paye aujourd'hui $B(0,t+1)$. Simultanément il peut emprunter la somme $B(0,t+1)$ à échéance t. A la date 0 les flux sont équilibrés. A la date t, l'investisseur doit payer $B(0,t+1)/B(0,t)$, (en effet,l'émetteur d'une obligation zéro coupon de maturité t rembourse 1 à l'échéance contre $B(0,t)$ aujourd'hui).

- Les flux sont les suivants : un décaissement égal à $B(0,t+1)/B(0,t)$ à la date t et un encaissement de 1 à la date $t+1$. Ces flux sont ceux d'un "projet d'obligation zéro coupon" de maturité 1 mais à la date future t. Aucun paiement n'a lieu aujourd'hui.

Definition 9 *On appelle zero coupon "forward" de maturité 1 (court terme) à la date t un actif qui prévoit aujourd'hui de prêter à la date t pour une période. Le profil est :* $(0,0,...,-\frac{1}{1+f_0(t)},1,0,0..)$, *dont la valeur à la date 0 est nulle (* $-\frac{1}{1+f_0(t)}B(0,t)+B(0,t+1)=0)$. *Il en résulte nécessairement :*

$$\frac{1}{1+f_0(t)}=\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}=\frac{(1+R(0,t))^t}{(1+R(0,t+1))^{t+1}}$$

On appelle $f_0(t)$ *le taux forward, à terme. A cette date t là, l'obligation zéro coupon d'échéance 1 vaudra* $B(t,t+1)$ *au comptatnt, qui n'est égal à* $\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}$ *qu'en univers déterministe.*

Ce type d'instrument financier dérivé, permet de se protéger contre des variations de taux d'intérêt à court terme. Si je sais que je vais devoir emprunter dans six mois je peux acheter ce genre de contrat à terme si je redoute que le taux d'intérêt à une période à cette date devienne supérieur à f_t.

De même, il peut attirer les "spéculateurs". Acheter un zéro coupon forward correspond à un décaissement de $\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}$ à la date t. Au comptant, le même flux *de* 1 à la date $t+1$ coûte à cette date $B(t,t+1)$ Cette opération qui conduit à un gain de $B(t,t+1)-\frac{B(0,t+1)}{B(0,t)}$ à la date t, n'est profitable à un spéculateur que si $B(0,t)B(t,t+1)\geq B(0,t+1)$. c'est à dire si le taux d'intérêt de court terme baisse.